Probeklausur

Hinweis: Diese Probeklausur wird in Typ und Umfang ungefähr der richtigen Klausur entsprechen. Beachten Sie, dass Themen, die in der Vorlesung besprochen wurden, die aber in der Probeklausur nicht drankommen, natürlich trotzdem prüfungsrelevant sind, schließlich ist die Probeklausur keine 1-1-Umsetzung der Klausur, sondern soll nur als (grober) Anhaltspunkt dienen.
Auf eine Punkteverteilung haben wir hier verzichtet, jede Aufgabe würde etwa gleich viele Punkte wert sein.

Viel Erfolg bei der Klausur-Vorbereitung!

Aufgabe 1
Sei p eine Primzahl, $n \in \mathbb{N}$, $q = p^n$ und $\mathbb{F}_q$ der Körper mit q Elementen. Sei $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$.

a) Bestimmen Sie $\#G$.

b) Zeigen Sie, dass $P = \{(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{F}_q\}$ eine p-Sylowgruppe ist.

c) Bestimmen Sie den Normalisator $N := \{g \in G : gPg^{-1} = P\}$ von P. (*Hinweis:* Es reicht, diejenigen $g \in G$ zu finden, so dass $gpg^{-1} \in P$ für alle $p \in P$ gilt.)

d) Bestimme die Anzahl der p-Sylowgruppen in G.

Aufgabe 2
Sei N eine natürliche Zahl, die $2^N - 1$ teilt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) N ist ungerade.

b) Sei p ein Primteiler von N und $a := \mathrm{ggT}(p-1, N)$. Dann ist p ein Teiler von $2^a - 1$.

c) $N = 1$.

Aufgabe 3
Sei $I = (2, X) \trianglelefteq \mathbb{Z}[X]$, das von 2 und X erzeugte Ideal. Zeigen Sie die nachfolgenden Aussagen:

a) Für alle n ist I^n das Erzeugnis von $2^n, 2^{n-1}X, ..., 2X^{n-1}, X^n$.

b) Für $n \geq 1$ ist I^n kein Hauptideal.

Aufgabe 4
Berechne alle $z \in \mathbb{Z}$, die die nachfolgenden Kongruenzen erfüllen.
$z \equiv 4(19)$
$z \equiv 12(37)$
$z \equiv 14(43)$
(*Hinweis:* Inverse modulo natürlicher Zahler lassen sich mit Hilfe des euklidischen Algorithmus bestimmen.)

Aufgabe 5
Es sei $A \leq \mathbb{C}$ eine Untergruppe (bezüglich $+$) und

$$R := \{z \in \mathbb{C} : zA \subseteq A\}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussage:

a) R ist ein Teilring von $\mathbb{C}$ und A ein R-Untermodul von $\mathbb{C}$.

b) Aus $1 \in A$ folgt $R \subseteq A$.

c) Ist $A \neq \{0\}$ endlich erzeugt, so sind R, A frei abelsch. Der Rang von $(R, +)$ ist dabei kleinergleich dem Rang von $(A, +)$.

d) Finden Sie ein Beispiel für $A \leq \mathbb{C}$ mit $1 \in A, A \not\subseteq \mathbb{Z}, R = \mathbb{Z}$.

Aufgabe 6
Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$.
Bestimmen Sie unimodulare Matrizen S, T, so dass SAT in Elementarteilernormalform vorliegt. Geben Sie die Elementarteil $a_1|a_2|a_3$ an.

Finden Sie anschließend $\mathbb{Z}$-Basen $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ von $H = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \rangle$ und $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ von $\mathbb{Z}^3$, so dass $b_i = a_i c_i$ für $i = 1, 2, 3$ gilt.

Zusatzaufgabe
Lesen Sie sich den Abschnitt über das Quadratische Reziprozitätsgesetz und seine Erweiterungssätze gut durch und verinnerlichen Sie sich diese.