Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein Dipl.-Math. Jochen Schröder

Einführung in Algebra und Zahlentheorie – Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es seien $T \subseteq M$ Mengen und $\varphi : T \to M$ eine injektive Abbildung.

a) Zeigen Sie, dass φ injektiv auf ganz M fortgesetzt werden kann, wenn T endlich ist.

b) Finden Sie ein Beispiel, das zeigt, dass die Endlichkeit von T eine wesentliche Voraussetzung ist.

Hinweis: In a) könnte es hilfreich sein, zunächst auch M als endlich anzunehmen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es seien X, Y und Z drei Mengen. Konstruieren Sie eine Bijektion

$$\mathrm{Abb}(X \times Y\ ,\ Z) \to \mathrm{Abb}(X,\ \mathrm{Abb}(Y, Z)).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es sei M eine Menge und $V = \mathrm{Abb}(M, \mathbb{R})$ der reelle Vektorraum aller reellwertigen Abbildungen auf M. Weiter sei V^* der Dualraum von V.
Denken Sie noch einmal über die zweite Aufgabe nach und geben Sie eine injektive Abbildung von M nach V^* an.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Erinnern Sie sich an die Definition sowie die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage des *Produktes von Mengen* aus der ersten Übung. Wir definieren nun analog das *Koprodukt von Mengen*.

Sei I eine beliebige Indexmenge, $\{M_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Mengen. Das *Koprodukt* der Mengen M_i ist eine Menge X versehen mit Abbildungen $\alpha_i : M_i \to X$ für alle $i \in I$ mit folgender universellen Abbildungseigenschaft (UAE):
Ist C eine weitere Menge mit Abbildungen $f_i : M_i \to C$, so gibt es genau eine Abbildung $g : X \to C$ mit der Eigenschaft $g \circ \alpha_i = f_i$ für alle $i \in I$.

Zeigen Sie, dass das Koprodukt stets existiert und bis auf Bijektion eindeutig ist.

Hinweis: Um die UAE des Koproduktes zu verstehen, könnte es sinnvoll sein, ein Diagramm zu malen, etwa für $I = \{1, 2\}$.

Abgabe der Übungsblätter:
Bitte werfen Sie Ihre Lösung zu diesem Übungsblatt bis Dienstag, 24. April, 9:30 Uhr in den entsprechenden Abgabekasten im 1C-Teil des Allianzgebäudes oder geben Sie dieses direkt vor der großen Übung Ihrem Übungsleiter.