

Einführung in Algebra und Zahlentheorie – Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $A_1 = \{1, \dots, d\}$ (für $d \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest), $A_2 = \mathbb{Z}$. Beide Mengen werden durch die Verknüpfung $x \bullet y = \min(x, y)$ zu einem Magma.

Zeige, dass A_1 und A_2 sogar Halbgruppen sind. Sind es sogar Monoide? Gib gegebenenfalls das neutrale Element und alle invertierbaren Elemente an.

Bestimme nun für $i = 1, 2$ die Magmen-Automorphismen von A_i .

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wir betrachten das Magma $M = (\mathbb{Z}, -)$.

- Zeige, dass M keine Halbgruppe ist. Zeige weiterhin, dass M kein neutrales Element besitzt. Gib gegebenenfalls ein links- bzw. rechtsneutrales Element an und folgere daraus, dass M nicht kommutativ ist.
- Finde ein Erzeugendensystem von M , so dass es kein Erzeugendensystem mit weniger Elementen gibt. Wieviele solcher Systeme gibt es?
- Zeige, dass $(\text{End}(M), \circ) \simeq (\mathbb{Z}, \cdot)$ ist.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Diese Aufgabe bietet ein kleines Sammelsurium an Aufgaben über Gruppen und Co. Die einzelnen Teilaufgaben können problemlos unabhängig voneinander bearbeitet werden.

- Finde eine Halbgruppe G , die mindestens zwei linksneutrale Elemente, aber kein rechtsneutrales Element besitzt.
- Zeige, dass es (bis auf Isomorphie) genau zwei Gruppen mit 4 Elementen gibt. (*Hinweis:* Wie sehen die Verknüpfungstabellen dieser Gruppen aus?)
- G sei ein Monoid mit neutralem Element e . Es gelte $x^2 = e$ für alle $x \in G$. Zeige, dass G eine abelsche Gruppe ist.
- Sei G ein endliches Monoid mit Linkskürzungsregel, das heißt, für $a, x, y \in G$ gelte $ax = ay \Rightarrow x = y$. Zeige, dass G eine Gruppe ist. Finde ein Beispiel, das zeigt, dass die Aussage für unendliches G im Allgemeinen falsch ist.
- Sei G eine Halbgruppe. Es gebe ein linksneutrales Element $e \in G$. Weiterhin gebe es für alle $g \in G$ ein $h \in G$ mit $hg = e$. Zeige, dass G dann bereits eine Gruppe ist.

Abgabe der Übungsblätter:

Bitte beachte, dass die Übung am 1.5. wegen Feiertag ausfällt. Bitte wirf deine Lösung zu diesem Übungsblatt bis Mittwoch, 2. Mai, 9:30 Uhr, in den entsprechenden Abgabekasten im 1C-Teil des Allianzgebäudes.

Ein neues Übungsblatt erhältst du ab dem 1.5. auf der Vorlesungswebseite, dort findest du auch eine Musterlösung zu diesem Blatt.