Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein Dipl.-Math. Jochen Schröder

Einführung in Algebra und Zahlentheorie – Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Seien G, H endliche Gruppen und $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus.

a) Zeige, dass für $g \in G$ die Ordnung $\operatorname{ord}(\varphi(g))$ ein Teiler der Ordnung $\operatorname{ord}(g)$ ist.

b) Sei nun konkret $G = S_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, H eine Gruppe ungerader Ordnung. Zeige, dass φ der triviale Homomorphismus ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Beweise die beiden folgenden Aussagen aus Beispiel 1.3.9 der Vorlesung:
Für eine Gruppe G und $g \in G$ ist die Konjugation mit g ein Gruppenautomorphimus von G.
Die Zuordnung $G \mapsto \operatorname{Aut}(G)$, $g \mapsto (h \mapsto ghg^{-1})$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

b) Zeige $\operatorname{Aut}(S_3) \cong S_3$.
(*Hinweis: Zeige, dass der Homomorphismus aus a) injektiv ist. Wieso ist er auch surjektiv? Hier könnte ein Mächtigkeitsargument helfen.*)

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei G eine Gruppe.

a) G und die triviale Gruppe seien die einzigen Untergruppen von G. Welche Form hat G?

b) G ist genau dann endlich, wenn G endlich viele Untergruppen besitzt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Seien G eine Gruppe, $U, V \leq G$ Untergruppen.

a) Zeige, dass $UV := \{uv \mid u \in U, v \in V\}$ genau dann eine Untergruppe ist, wenn $UV = VU$.

b) Zeige, dass $U \cup V$ genau dann eine Untergruppe ist, wenn $U \subseteq V$ oder $V \subseteq U$ gilt.

Abgabe der Übungsblätter:
Bitte wirf deine Lösung bis Dienstag, 8. Mai, 9:30 Uhr, in den entsprechenden Abgabekasten im 1C-Teil des Allianzgebäudes oder gib sie direkt vor der großen Übung deinem Übungsleiter.