Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein Dipl.-Math. Jochen Schröder

Einführung in Algebra und Zahlentheorie – Übungsblatt 10[1]

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei R ein kommutativer Ring mit genau drei Assoziiertenklassen. Zeige:

a) R besitzt genau ein Ideal m mit $m \neq R, m \neq \{0\}$.

b) R/m ist ein Körper.

c) Für jedes $x \in m$ gilt $x^2 = 0$.

Aufgabe 2 (4 Punkte) **(Neufassung)**
Sei $R \subseteq \mathbb{C}$ ein Teilring von $\mathbb{C}$ und $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ der Standardbetrag von $\mathbb{C}$.
Zeige, dass R genau dann eine Division mit Rest bezüglich $|\cdot|^2$ besitzt[2], wenn folgende Eigenschaft gilt:
Für alle $x \in R, y \in R \setminus \{0\}$ gibt es ein $z \in R$ mit $|\frac{x}{y} - z| < 1$.
(*Hinweis:* Wiederhole das geometrische Argument für den Ring $\mathbb{Z}[i]$ aus der Vorlesung.)

Wegen $|x|^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ist R dann also euklidisch nach Definition, wenn zusätzlich das Bild von R unter $|\cdot|^2$ eine Teilmenge von $\mathbb{N}_0$ ist.

Seien $a_1 = \sqrt{3}, a_2 = \sqrt{3}i, a_3 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$. Für $j = 1, 2, 3$ sei $R_j = \mathbb{Z}[a_j]$ der kleinste Teilring von $\mathbb{C}$, der $\mathbb{Z}$ und a_j umfasst.
Zeige jeweils, dass jedes Element in R_j eindeutig als $x + ya_j$, $x, y \in \mathbb{Z}$ dargestellt werden kann.
Beweise oder widerlege jeweils, ob der Ring R_j eine Division mit Rest bezüglich $|\cdot|^2$ besitzt und ob er euklidisch ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Zeige, dass für einen Körper K der Ring $K[[X]]$ der formalen Potenzreihen[3] ein euklidischer Ring ist.

Aufgabe 4 (3 Punkte)
Erinnerung: $\mathbb{R}[X]$ ist euklidisch bezüglich γ mit $\gamma(0) = 0$, $\gamma(f) = \text{Grad}(f) + 1$ für $f \neq 0$.
Bestimme mit Hilfe des euklidischen Algorithmus einen größten gemeinsamen Teiler der Polynome

$$X^3 - 2X^2 - X + 2 \text{ und } X^3 - 4X^2 + 3X \in \mathbb{R}[X]$$

und stelle den ggT als Linearkombination der beiden Polynome dar.

Aufgabe 5 (3 Punkte)
Zeige, dass ein Polynom $f \in \mathbb{C}[X]$ genau dann eine doppelte Nullstelle besitzt, wenn f und die Ableitung f' nicht teilerfremd sind.
(*Hinweis:* Benutze, dass in $\mathbb{C}$ jedes nichtkonstante Polynom in Linearfaktoren zerfällt, und die Produktregel, die du aus der Analysis 1 kennst.)

Abgabe bis Dienstag, 26. Juni, 9:40 Uhr im Abgabekasten, direkt vor der großen Übung um 9:45 Uhr oder auch vorher direkt bei deinem Übungsleiter.

[1] Auf diesem Übungsblatt gibt es bis zu 17 Punkte zu holen. Warum nicht?
[2] das heißt, für $x, y \in R, y \neq 0$ gibt es z, so dass $x = zy + r$ mit einem r mit $|r|^2 < |y|^2$
[3] Vergleiche Übungsblatt 8!