Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein   Dipl.-Math. Jochen Schröder

Einführung in Algebra und Zahlentheorie – Übungsblatt 13

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$.

a) Für den Parameter $\alpha \in \mathbb{Z}$ sei das LGS $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ gegeben. Benutze den Gauß-Algorithmus, um das LGS zu vereinfachen, und bestimme, für welche α das LGS ganzzahlig lösbar ist.

b) Finde nun unimodulare Matrizen $S, T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, so dass SAT in Elementarteiler-Normalform ist. Gib die Elementarteiler $a_1 | a_2$ an.

c) Was müssen $\beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ erfüllen, damit das LGS $Ax = \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ ganzzahlig lösbar ist? Verifiziere deine Aussage aus a).

Sei nun $H = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle$ eine freie Untergruppe von $\mathbb{Z}^2$ vom Rang 2.

d) Zeige, dass H eine echte Untergruppe von $\mathbb{Z}^2$ ist.

e) Benutze S, T, um Basen $B_H = \{h_1, h_2\}$ von H und $B_{\mathbb{Z}^2} = \{z_1, z_2\}$ von $\mathbb{Z}^2$ zu finden, so dass $h_1 = a_1 z_1, h_2 = a_2 z_2$ gilt. (*Hinweis: Basiswechsel, lineare Algebra*)

Aufgabe 2 (4 Punkte) *alte Klausuraufgaben, wo man hinschaut...*
Es sei G eine endliche abelsche Gruppe von Ordnung $n \in \mathbb{N}$. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i) G ist zyklisch.

ii) Für alle Teiler d von n gibt es genau eine Untergruppe von G mit Ordnung d.

iii) Für alle Teiler d von n gibt es höchstens eine Untergruppe von G mit Ordnung d.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Gegeben sei die symmetrische Gruppe S_7 und $H = \{h \subseteq S_7 : \#h = 7\}$ die Menge der 7-Sylowgruppen. S_7 operiert auf H durch Konjugation.

a) Bestimme $\#H$.

b) Bestimme die Mächtigkeit des Stabilisators von h für ein beliebiges $h \in H$.

c) Zeige, dass es keine Untergruppe der Ordnung 140 von S_7 gibt.

Wer nicht wendet, verpasst das Beste.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Eine nichttriviale Gruppe G heißt einfach, wenn sie nur die trivialen Normalteiler $\{e_G\}, G$ besitzt. Sei nun G eine Gruppe. Zeige die folgenden Aussagen:

a) Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe, so dass es keine weitere Untergruppe der gleichen Ordnung gibt. Dann ist H ein Normalteiler von G.

b) Sei $\#G = 40$. Dann ist G nicht einfach.

c) Sei $\#G = 24$. Dann ist G nicht einfach. (*Hinweis:* Sollte der Trick aus Aufgabenteil b) nicht funktionieren, so könnte die Gruppenoperation aus Aufgabe 3 helfen.)

Abgabe bis Dienstag, 17. Juli, 9:40 Uhr im Abgabekasten, direkt vor der großen Übung um 9:45 Uhr oder auch vorher direkt bei deinem Übungsleiter.