Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein   Dipl.-Math. Jochen Schröder

Einführung in Algebra und Zahlentheorie – Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei G eine Gruppe mit Normalteilern $H, N \trianglelefteq G$. Des Weiteren sei $N \subseteq H$. Dann gilt:

a) N ist ein Normalteiler in H.

b) H/N ist ein Normalteiler in G/N.

c) $(G/N)/(H/N) \cong G/H$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei G eine Gruppe. Der *Kommutator* $[G,G]$ sei diejenige Untergruppe von G, die von allen *Kommutatoren* $xyx^{-1}y^{-1}$ mit $x, y \in G$ erzeugt wird.

a) $[G,G]$ ist ein Normalteiler in G.

b) Für einen Normalteiler $N \trianglelefteq G$ gilt: G/N abelsch $\Leftrightarrow [G,G] \subseteq N$.
Insbesondere ist $G^{ab} := G/[G,G]$ abelsch.

c) Bezeichne $\pi : G \to G^{ab}$ die kanonische Projektion. Zeige, dass G^{ab} folgende universelle Abbildungseigenschaft erfüllt:
Für jede abelsche Gruppe H und jeden Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\overline{\varphi} : G^{ab} \to H$ mit $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Bestimme $F_2/[F_2, F_2]$, wobei $F_2 = \langle x, y \rangle$ die freie Gruppe in zwei Erzeugern sei.
(Eine mögliche Vorgehensweise wäre, zunächst die UAE der freien Gruppe zu verwenden, um einen Gruppenhomomorphismus in eine bekannte Gruppe zu finden. Anschließend solltest du die Darstellung der Elemente als endliche Wörter verwenden, um den Kern des Gruppenhomomorphismus zu bestimmen.)

Aufgabe 4 (4 Punkte)
In dieser Aufgabe wollen wir einsehen, dass $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) := \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm I_2\}$ eine einfache Gruppe ist. Zunächst zeigen wir, dass jeder Normalteiler N von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ mit $\{\pm I_2\} \subsetneq N$ bereits ganz $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ist.

a) Zeige, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ durch alle Matrizen der Typen $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$ mit $* \in \mathbb{C}$ erzeugt wird.

b) Sei $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ beliebig. Zeige, dass es ein $S \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ gibt, so dass $S^{-1}AS$ in Jordan'scher Normalform ist.

c) Sei nun $A \in N, A \neq \pm I_2$. Betrachte zwei Fälle für die Jordan'sche Normalform. Zeige, dass in beiden Fällen alle Matrizen aus a) in N enthalten sind, und folgere, dass $N = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ gilt.

d) Zeige, dass $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ eine einfache Gruppe ist.

Abgabe der Übungsblätter:
Bitte wirf deine Lösung bis Dienstag, 15. Mai, 9:30 Uhr, in den entsprechenden Abgabekasten im 1C-Teil des Allianzgebäudes oder gib sie direkt vor der großen Übung deinem Übungsleiter.