

Einführung in Algebra und Zahlentheorie – Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei M eine Menge und $\mathcal{P}(M)$ ihre Potenzmenge. Für $A, B \in \mathcal{P}(M)$ sei $A \Delta B$ die *symmetrische Differenz*:

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Zeige, dass $\mathcal{P}(M)$ mit den Verknüpfungen Δ und \cap zu einem kommutativen Ring wird.

Überlege dir zunächst, welche der beiden Verknüpfungen additiv, welche multiplikativ ist, und zeige anschließend die Axiome.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $d \in \mathbb{Z}$ kein Quadrat einer rationalen Zahl und $w \in \mathbb{C}$ eine Wurzel von d . Sei R der kleinste Ring, der \mathbb{Z} und w umfasst. Zeigen Sie:

- Jedes Element aus R kann eindeutig als $a + bw$, $a, b \in \mathbb{Z}$ geschrieben werden.
- Die Abbildung $\psi : R \rightarrow R, a + bw \mapsto a - bw$ ist ein Ring-Automorphismus von R .
- Die Abbildung $\mathcal{N} : R \rightarrow \mathbb{C}, r \mapsto r \cdot \psi(r)$ ist ein Monoid-Homomorphismus von (R, \cdot) nach (\mathbb{Z}, \cdot) .
- Es ist $R^\times = \{r \in R : \mathcal{N}(r) \in \{\pm 1\}\}$.
- Berechnen Sie mit Hilfe von d) für alle $d < 0$ die Einheitengruppe.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Zeige, dass es keinen Ring mit genau 5 Einheiten geben kann.

(*Hinweis:* Was ist die Charakteristik eines solchen Ringes? Untersuche für eine Einheit a der Ordnung 5 das Element $1 + a^2 + a^3$!)

Du solltest das Blatt wenden!

Abgabe bis Dienstag, 29. Mai, 9:40 Uhr im Abgabekasten, direkt vor der großen Übung um 9:45 Uhr oder auch vorher direkt bei deinem Übungsleiter.

Märchen 4 (4 Punkte)

Was war das für ein Trubel in der Höhle der Zwerge. Schneewittchen hatte wieder einmal angekündigt, ihren Prinzen heiraten zu wollen, und obwohl jedem der Zwerge insgeheim klar war, dass die Hochzeit wieder einmal daran scheitern würde, einen Termin zu finden, an dem alle Gäste Zeit finden – dies erzählen wir in einer anderen Geschichte – waren alle Zwerge mit den Vorbereitungen beschäftigt.

Oberschlau hatte bei Hochzeit natürlich gleich wieder an die Algebra gedacht, „Ohne Ringe kann man nicht heiraten!“ gerufen und einen Vortrag über Ringtheorie gehalten, der allen im Kopf rumspukete, spätestens seit der Prinz erschreckt festgestellt hatte, dass er die Ringe ganz vergessen hatte.

„Die Kuh motzt schon wieder“, rief Rumpel, der gerade verzweifelt versuchte, die Kuh zu melken, die heftig dagegen protestierte, aber sie brauchten doch dringend Milch für die Hochzeitstorte.

„Die Kuh motzet?“, sinnierte Kumpel. Gleich kam ihm eine Idee und flugs schrieb er dem verblüfften Prinzen Q/Z auf einen Zettel und verkündete lautstark, dass er hier eine additive Gruppe gefunden habe, die der Prinz nur noch mit einer passenden Multiplikation versehen müsse, um Schneewittchen doch einen Ring überreichen zu können. Gerade wollte Oberschlau protestieren, doch zu ihrer aller Verblüffung rief schon der Prinz spontan aus, dass er wohl noch einen Zauberer benötigen würde, um hier eine Multiplikation zu finden. „Richtig, das geht nämlich gar nicht“, ergänzte Oberschlau, ein wenig verärgert, dass der Prinz die passende Antwort gegeben hatte. (*)

„Aua...“, das war wieder Rumpel, der sich sein Schienbein rieb, gegen das er gerade getreten worden war, „Brauchen wir die Milch denn wirklich?“

„Da steht: 'ein Liter Milch'“, antwortete Hampel, der das Kochbuch noch einmal genau studierte. „Wenn wir keine Milch hätten...“ „Ein Liter gleich null Liter...“ warf Oberschlau ein, „Das geht wohl genau dann, wenn die Mengenangaben des Kochbuchs aus dem Nullring stammen“. (*)

Hatte er das wirklich gesagt? Dass der Prinz ihm die Möglichkeit genommen hatte, Kumpel zu verbessern, hatte ihn dermaßen geärgert, dass er jetzt schon solche Trivialitäten von sich gab. „Den Nullring sollte Schneewittchen aber besser nicht kriegen“, hielt Hampel dagegen, der immer noch das Kochbuch las. „Hier, wir können notfalls Phi-Kringel backen, dazu brauchen wir keine Milch.“

„Wir kriegen aber Milch und wenn ich das blöde Vieh..... Er... Es... Sie hat mich schon wieder getreten!“, beschwerte sich Rumpel. „Vieh, Er, Es?“, wiederholte Pümpel nachdenklich von der Seite. „Da konnte ich vorhin schon bei Oberschlaus Vortrag nicht folgen. Der hatte doch auch immer sowas...“ „Schneewittchen ist ja auch nicht homomorph“, wandte der freche Hampel von der Seite ein und erntete ein paar böse Blicke. „Früher sah sie mehr wie eine 1 aus.... Wenn wir sie jetzt auch noch mit Hochzeitstorte füttern...“

„Das wiederum würde für Phi-Kringel sprechen“, rief Oberschlau dazwischen, „schließlich wissen wir, was mit Einsen passiert, zumindest, wenn Phi ein Ring-Homomorphismus ist.“ „Wieso muss man das eigentlich fordern?“ fragte Pümpel, der sich langsam wieder an Details aus Oberschlaus Vortrag erinnerte. „Ich meine, heute fordert Schneewittchen doch schon genug von uns...“

Oberschlau war in seinem Element und da der Prinz gerade dabei war, seine Leibgarde zu begutachten, konnte er in aller Ruhe Pümpel mit einem Beispiel überzeugen, dass er in seinen Definitionen nicht zu viel hingeschrieben hatte. (*)

„Verdammt...“, hörten sie den Prinzen aus der Ferne fluchen. „Meine Leibgarde sollte hochzeitlich aussehen, aber in ihren Rüstungen sehen sie aus wie Einheiten, die aufs Schlachtfeld, nicht an einen Altar gehören.“ „Auch hier werden Phi-Kringel nicht helfen“, lachte Oberschlau. „Denn was unter einem Ring-homomorphismus Phi mit Einheiten passiert, sollte bekannt sein...“ (*)

An dieser Stelle wollen wir unsere Zwerge verlassen, die weitere Geschichte ist kurz erzählt: Es gab ein großes Chaos, Rumpel wurde von der Kuh getreten, die Phi-Kringel sind verbrannt, aber das war gar nicht schlimm, weil die Hochzeit eh ausfallen musste... Gerade Schneewittchens wichtiger Freund aus China hatte es zu dem Termin nicht geschafft...

Und wenn sie nicht gestorben sind, dann reden sie auch heute noch durcheinander. Du hingegen solltest dir die Stellen mit den Sternchen noch einmal genauer anschauen und etwas Mathematik betreiben. Worüber haben die Zwerge an diesen Stellen gesprochen?

Weitere offene Fragen, die dich interessieren könnten:

Wird Schneewittchen jemals heiraten? Wird der chinesische Restsatz ihr dabei helfen können, endlich ihr Glück zu finden? Wenn ja: Wird Dornröschen die Trauung verschlafen? Welcher der Zwerge sollte Trauzeuge des Prinzen sein?

Achja, wieviel Mehl braucht man noch mal für ein Dutzend Phi-Kringel?

ENDE