Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein   Dipl.-Math. Jochen Schröder

Einführung in Algebra und Zahlentheorie – Übungsblatt 6+1

Aufgabe 1 (3 Punkte)
R sei ein Integritätsbereich[1]. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) R ist ein Körper.

(ii) R besitzt genau zwei Ideale.

(iii) R besitzt nur endlich viele Ideale.

Folgere, dass jeder endliche Integritätsbereich ein Körper ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte) *und schon wieder eine alte Klausur-Aufgabe*
Seien R, S kommutative Ringe, $I \trianglelefteq R, J \trianglelefteq S$ Ideale in R beziehungsweise S. Desweiteren sei $\varphi : R \to S$ ein Ring-Homomorphismus.

a) $\varphi^{-1}(J)$ ist ein Ideal in R.

b) Ist φ surjektiv, so ist $\varphi(I)$ ein Ideal in S.

c) Ist $\varphi(I)$ immer ein Ideal in S? Beweise dies oder finde ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Sei R ein Integritätsbereich, n eine natürliche Zahl > 1. Dann ist $R^{n\times n}$ ein nicht-kommutativer Ring.

a) Finde einen $R^{n\times n}$-Untermodul in $R^{n\times n}$, der kein Ideal ist.[2]

b) Zeige, dass die Ideale in $R^{n\times n}$ gerade die $J^{n\times n}$ sind, wobei J ein Ideal von R ist.

c) Sei $J^{n\times n}$ ein Ideal in $R^{n\times n}$, J wie in Aufgabenteil b).
Zeige, dass $R^{n\times n}/J^{n\times n} \cong (R/J)^{n\times n}$.

d) Sei nun R ein Körper, $S \neq 0$ ein Ring und $\varphi : R^{n\times n} \to S$ ein Ringhomomorphismus. Zeige, dass φ injektiv ist.

Eine Zwergenaufgabe sei mir noch gestattet. Wende das Blatt, um sie zu lesen!

Abgabe bis Dienstag, 5. Juni, 9:40 Uhr im Abgabekasten, direkt vor der großen Übung um 9:45 Uhr oder auch vorher direkt bei deinem Übungsleiter.

[1] Insbesondere ist dann $R \neq 0$.

[2] Wenn man von links- und rechtsseitigen Idealen spricht, dann suchen wir hier ein Linksideal, das kein Rechtsideal ist. Für ein Linksideal I von einem Ring S fordern wir dabei nur $SI \subseteq I$, aber nicht $IS \subseteq I$. Man beachte, dass für einen Untermodul gerade die erste Abgeschlossenheit wichtig ist.
Bei kommutativen Ringen sind (zweiseitige) Ideale, Linksideale, Rechtsideale sowieso alle gleich und man überzeugt sich schnell, dass man in der nicht kommutativen Welt lieber gar nicht nach Idealen schaut. Aber es ist trotzdem gut, so etwas einmal gesehen zu haben.

Aufgabe 4 (4 vergiftete Äpfel)

Die Vorgeschichte
Manche behaupten, Zwerge hätten in der modernen Welt der Mathematik nichts verloren. Das mag tatsächlich stimmen. Eine Geschichte haben wir aber noch versprochen, die soll hier noch erzählt werden. Erinnert ihr euch an Schneewittchens Hochzeitspläne? In grauer Vorzeit, manche mögen es letzte Woche nennen, hatte Schneewittchen einen Termin gesucht, an dem sie heiraten wollte...

„Ich werde nur Donnerstag heiraten, das ist mein Glückstag“, bestimmte Schneewittchen. „Heute ist Dienstag, der 29. Mai“, sinnierte der Prinz, „wir können also übermorgen hei –“ „Nein, nein!“ wurde er unterbrochen. „Du denkst daran, dass meine Trauzeugin dann schläft? Du weißt doch, seit dem Unfall mit der Spindel schläft Dornröschen eigentlich nur noch.“
„Sie ist nur alle 11 Tage wach“, warf Rumpel ein, „am zweiten Juni das nächste Mal. Aber das ist ein Samstag.“
„Kein Problem“, sagte Oberschlau, „wir werden einen Donnerstag finden, an dem Dornröschen wach ist. Das nächste mal müsste das doch bereits in wenigen Tagen der Fall sein.“ Er begann zu rechnen...
Erleichterung machte sich im Gesicht des Prinzen breit, doch wie immer setzte Schneewittchen noch einen drauf: „Du weißt aber, dass hier nur alle 4 Tage saubergemacht wird, mein Lieber? Nur an einem solchen Tag werde ich heiraten!“ „Wir haben heute morgen gewischt!“ rief Kumpel dazwischen.
Doch Schneewittchen wäre nicht Schneewittchen, wenn sie nicht noch mehr Wünsche hätte. „Ohne meinen alten Freund Li aus China werde ich nicht heiraten!“ intonierte sie. „Er kann morgen hier sein. Danach wieder Samstag, Dienstag... Alle drei Tage eben.„

Der sonst so beherrschte Prinz begann mit dem Kopf zu schütteln. “Willst du mich überhaupt heiraten? Ich glaube kaum, dass wir einen passenden Termin finden werden...„ murmelte er. Schneewittchen - die eigentlich gerade ihre weiteren Bedingungen anbringen wollte - nahm ihn bei der Hand und versprach, dass sie es sicher noch dieses Jahr schaffen würden.

Oberschlau wollte sich gerade räuspern, hielt sich aber tatsächlich zurück. Eigentlich war jedem aus dem Raum klar, dass die Hochzeit wohl kaum vor 2027 stattfinden würde, wenn sich Schneewittchen nicht bescheidener zeigen würde. Und Bescheidenheit war ja nicht ihre Stärke, nur bei Äpfeln hielt sie sich immer sehr zurück. (Das allerdings ist auch wieder eine andere Geschichte. Die lasst ihr euch bitte von euren Eltern erzählen.)

Aber wie sieht das eigentlich mathematisch aus? In wievielen Tagen können der Prinz und die Prinzessin unter den gegebenen Umständen frühestens heiraten – wird es im Jahr 2012 möglich sein? Wie viele Tage müssen sie danach warten, bis sie wieder einen passenden Termin finden?
Wann kauft sich Dornröschen endlich einen besseren Wecker?

Wie sieht das eigentlich aus, wenn der Lieferant der Hochzeitstorte – wir erinnern uns, dass die Zwerge gewisse Probleme hatten, selbst eine herzustellen – nur alle 6 Tage liefern könnte? Wann sollte er liefern können, damit die Hochzeit überhaupt theoretisch Chancen hat, tatsächlich einmal stattzufinden?