Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein   Dipl.-Math. Jochen Schröder

Einführung in Algebra und Zahlentheorie – Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei R ein kommutativer Ring. Die Elemente von $R[[X]] = \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i : a_i \in R\}$ heißen *formale Potenzreihen.* Glaube[1], dass $R[[X]]$ mit den folgenden Verknüpfungen[2] zu einem Ring wird:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i &= \sum_{i=0}^{\infty} c_i X^i \quad \text{mit } c_i = a_i + b_i, \\ \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \cdot \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i &= \sum_{i=0}^{\infty} c_i X^i \quad \text{mit } c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}. \end{aligned}$$

Zeige, dass $\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ genau dann invertierbar ist, wenn a_0 in R invertierbar ist.
Gib für $a_0 \in R^\times, a_1 \in R$ eine allgemeine Formel für das multiplikativ Inverse zu $a_0 + a_1 X$ an und wende sie an, um $(1 - X)^{-1}$ zu berechnen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Gegeben sei der Monoidring $\mathbb{Z}[M]$, wobei $M = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \cdot)$.

a) Sammle einen halben Punkt, indem du ein allgemeines Element aus $\mathbb{Z}[M]$, das Ergebnis des Produktes zweier solcher Elemente sowie die beiden Neutralelemente explizit angibst.

b) Bestimme nun die Einheitengruppe $\mathbb{Z}[M]^\times$.

c) Bestimme alle Nullteiler. Gib weiterhin für jeden Nullteiler $x \in \mathbb{Z}[M]$ die Menge $N_x = \{y \in \mathbb{Z}[M] : xy = 0\}$ an.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Zeige, dass $\mathbb{R}[X]/(X^2 - X)$ und $\mathbb{R}[(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \cdot)]$ als $\mathbb{R}$-Algebren isomorph sind.
(Es versteht sich von selbst, dass hierbei zunächst verstanden werden sollte, wie die $\mathbb{R}$-Algebren-Struktur jeweils aussieht!)

Aufgabe 4
Sei $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$. Finde alle Polynome $f \in R \setminus R^\times$ vom Grad ≤ 4, die die folgende Eigenschaft erfüllen: Ist $f = gh$ das Produkt zweier Polynome $g, h \in R$, so ist $g \in R^\times$ oder $h \in R^\times$.[3]

Abgabe bis Dienstag, 12. Juni, 9:40 Uhr im Abgabekasten, direkt vor der großen Übung um 9:45 Uhr oder auch vorher direkt bei deinem Übungsleiter.

[1] Das heißt, dass du es nicht beweisen musst. Es dir klarzumachen oder deinen Tutor zu fragen, kann aber nicht schaden.
[2] Die Verknüpfungen sehen aus wie im Monoidring. Mache dir klar, was der Unterschied zwischen dem Monoidring $R[X] \cong R[\mathbb{N}_0]$ und $R[[X]]$ ist und welche Eigenschaft von $\mathbb{N}_0$ wir benötigen, damit die Verknüpfungen dennoch funktionieren!
[3] Wir suchen also Polynome, die sich nicht als Produkt von zwei Nichteinheiten schreiben lassen. Wir nennen solche Polynome *irreduzibel* oder *unzerlegbar* und werden in nächster Zeit einiges über diesen Begriff in beliebigen Ringen lernen. Im Fall von Polynomen lässt sich das aber gut ohne Vorwissen durchrechnen.