Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein   Dipl.-Math. Jochen Schröder

Einführung in Algebra und Zahlentheorie – Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei R ein kommutativer Ring und $(S, \cdot) \subseteq (R, \cdot)$ ein Untermonoid. Weiterhin sei A ein kommutativer Ring und $\varphi : R \to A$ ein Ringhomomorphismus mit $\varphi(S) \subseteq A^\times$.
Wir definieren $\tilde{R} := \{\varphi(r)\varphi(s)^{-1} : r \in R, s \in S\} \subseteq A$.

a) Zeige, dass $\tilde{R}$ ein Teilring von A ist.

b) Sei $\tilde{I}$ ein Ideal in $\tilde{R}$. Zeige, dass es als Ideal von $\varphi(\varphi^{-1}(\tilde{I}))$ erzeugt wird.

c) Zeige, dass jedes Ideal in $\tilde{R}$ endlich erzeugt ist, wenn dies für alle Ideale in R gilt.

d) Schließlich sei konkret $A \subseteq \mathbb{Q}$, $R = \mathbb{Z}$, $S = \mathbb{Z} \cap A^\times$.
Erinnere dich, dass in diesem Fall φ eindeutig bestimmt ist, und zeige $A = \tilde{R}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Bestimme den ggT von 7854 und 5015 und stelle ihn als ganzzahlige Linearkombination dieser Zahlen dar.

b) Überlege dir, wie du den euklidischen Algorithmus verwenden kannst, um multiplikative Inverse in den Ringen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ zu berechnen. Bestimme anschließend das Inverse zu 42 in $\mathbb{Z}/59\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/71\mathbb{Z}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Die bekannten Fibonacci-Zahlen F_n sind wie folgt gegeben:

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \text{ und dann rekursiv durch } F_n := F_{n-2} + F_{n-1} \text{ für } n \geq 2.$$

Wir untersuchen, wie sich der euklidische Algorithmus verhält, wenn er auf benachbarte Fibonacci-Zahlen angewendet wird. Alle Reste seien dabei stets nicht-negativ, das Abbruch-Kriterium sei Rest 0.

Bestimme zunächst für $n \in \mathbb{N}_0$ den größten gemeinsamen Teiler von F_{n+1}, F_n und stelle ihn als Linearkombination dieser beiden Zahlen dar.
Ab sofort sei $n \geq 3$. Zeige, dass für die Berechnung des ggTs von F_n, F_{n+1} genau $n-1$ Schritte benötigt werden. Ist hingegen $0 < a \leq b < F_n$, so werden höchstens $n-2$ Schritte benötigt, um den ggT von a und b zu berechnen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Seien $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{A \in \mathbb{Z}^{2\times 2} : \det(A) = 1\}$ gegeben.
Berechne für alle $k \in \mathbb{Z}$ die Potenzen S^k, T^k. Zeige, dass S und T die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ erzeugen.

Dieses Übungsblatt kommt schon wieder ohne Zwergenaufgabe aus. Wenn du wieder einmal eine solche haben willst, so denke dir doch selbst eine aus und stelle sie deinem Übungsleiter. Er freut sich aber auch über ein schönes Zwergenmärchen ohne Mathematik.

Abgabe bis Dienstag, 19. Juni, 9:40 Uhr im Abgabekasten, direkt vor der großen Übung um 9:45 Uhr oder auch vorher direkt bei deinem Übungsleiter.