

Einführung in Algebra und Zahlentheorie – Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $M = \{a, b, c\}$ (mit a, b, c paarweise verschieden) eine Menge mit genau drei Elementen. Gib – falls möglich – eine Verknüpfung $*$ auf M an, so dass

- a) M ein Magma, aber keine Halbgruppe ist.
- b) M eine Halbgruppe, aber kein Monoid ist.
- c) M ein Monoid, aber keine Gruppe ist.
- d) M eine Gruppe ist.

Zeige gegebenenfalls, dass eine solche Verknüpfung nicht existiert. Führe Nachweise, dass M die entsprechende algebraische Struktur besitzt, aus, verliere dich dabei aber nicht im Detail. Gib jeweils ein Gegenbeispiel an, dass die Verknüpfung nicht die nächsthöhere Anforderung erfüllt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien G eine Gruppe, $U, V \leq G$ Untergruppen.

- a) Zeige, dass $UV := \{uv \mid u \in U, v \in V\}$ genau dann eine Untergruppe ist, wenn $UV = VU$.
- b) Zeige, dass $U \cup V$ genau dann eine Untergruppe ist, wenn $U \subseteq V$ oder $V \subseteq U$ gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Finden Sie Monoide M, N und einen Monoid-Homomorphismus $\varphi: M \rightarrow N$ mit der folgenden Eigenschaft: Es ist $\varphi^{-1}(\{e_N\}) = \{e_M\}$, aber φ ist nicht injektiv.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gegeben seien das Monoid $N = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ mit komponentenweiser Addition sowie ein weiteres Monoid M . Bestimme alle Monoid-Homomorphismen von N nach M .

Zusatzaufgabe (4 Punkte)

Seit Jahren schon – ach was: seit Jahrhunderten! – wohnten die Zwerge in ihrer gemütlichen Höhle und erfreuten sich des Lebens. Schon so manchen Strauß hatten sie mit den Zauberern gefochten, hatten Riesen invariant gemacht und Schneewittchens Wünsche zu erfüllen versucht und was es noch so an zwergentypischen Aufgaben zu erledigen galt. Und immer hatten sie es verstanden, die richtigen mathematischen Konzepte für ihre Zwecke zu nutzen.¹

In letzter Zeit jedoch beklagten sich einige unserer Zwerge über eine unangenehme Wärme, die immer stärker aus dem Gestein zu steigen schien. Schon munkelte man über Vulkane, Sühne und Untergang der Zwergengemeinschaft.

Oberschlau waren diese Unkenrufe nicht recht, und so hinterfragte er die düsteren Prognosen der anderen ein ums andere Mal.

Als er Monopol fragte, was das für ein Magma sein solle, das da in den Tiefen schlummert, erhielt er nur zur Antwort: „Kein triviales jedenfalls, soviel sagt mir der Verstand unter meiner Zwergenmütze.“

Zwiepel antwortete, nach möglichen Aktionen befragt, dass er nur wisse, was sicher nichts bringt; teilen könne man das Magma nicht, denn es hänge so fest zusammen, dass es von jedem Teil² erzeugt werde.

Als Tripel schließlich Auskunft über das Ausmaß des Magmas geben sollte, erfuhr Oberschlau lediglich, dass es sehr tief hinabreiche.

„Ah... so... tia... tief – ABER JA DOCH!!! – Genau das müsste uns helfen. Das Magma, das ihr beschreibt, ist leer!“

Ein erstauntes Raunen ging durch die Menge, und als man den Fels einen kleinen Spalt weit öffnete, fand man nichts. Alle waren erstaunt, wie Oberschlau das nun wieder angestellt hatte. Schließlich verriet er, dass er insbesondere deshalb nicht an das Magma geglaubt hatte, da er – etwas betagt war er ja nun schon – sich den Luxus einer kleinen Heizung erlaubt hatte, und die wäre wahrscheinlich für die ungewöhnliche Wärme zuständig.

Der Rest war eine leichte Übungsaufgabe. Oder?

Abgabe der Übungsblätter:

Bitte wirf deine Lösung zu diesem Übungsblatt bis Freitag, 10. Mai, 11:30 Uhr in den entsprechenden Abgabekasten im 1C-Teil des Allianzgebäudes. Am 9. Mai ist Feiertag und die Übung fällt aus!

¹Bisher ist das eher für solche Leser interessant, die schon andere Zwergenaufgaben kennen, am besten die, auf die hier angespielt wird. ;-)

²Von jedem nichtleeren Teil versteht sich; für solche Haarspaltereien hatten nicht alle Zwerge einen Sinn, vor allem in diesen Schicksalsstunden.