Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie

PD Dr. Stefan Kühnlein   Dipl.-Math. Jochen Schröder

Einführung in Algebra und Zahlentheorie – Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Seien G und H endliche Gruppen und $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige die folgenden Aussagen:

a) Für $g \in G$ ist die Ordnung $\operatorname{ord}(\varphi(g))$ ein Teiler der Ordnung $\operatorname{ord}(g)$.

b) Seien nun $n \in \mathbb{N}$, $G = S_n$ und H eine Gruppe ungerader Ordnung. Dann ist φ trivial.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei G eine Gruppe und $g \in G$. Die *Konjugation* mit g ist die Abbildung $k_g\colon G \to G$, gegeben durch $k_g(h) = ghg^{-1}$. Zeige die folgenden Aussagen:

a) Die Konjugation mit g ist ein Gruppenautomorphismus von G.

b) Die Zuordnung $g \mapsto k_g$ definiert einen Gruppenhomomorphismus $G \to \operatorname{Aut}(G)$.

c) $\operatorname{Aut}(S_3) \cong S_3$.
(*Hinweis:* Zeige, dass der Homomorphismus aus b) injektiv ist. Wieso ist er auch surjektiv? Hier könnte ein Mächtigkeitsargument helfen.)

Aufgabe 3 (4 Punkte + 1 Zusatzpunkt)
Die Menge $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{A \in \mathbb{Z}^{2\times 2} : \det(A) = 1\}$ ist mit der Multiplikation von Matrizen eine Gruppe.[1]
In $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ seien die Matrizen $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gegeben.
Berechne für $k \in \mathbb{Z}$ die Potenzen S^k und T^k und gib die Ordnung von S und T an. Zeige anschließend, dass S und T die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ erzeugen.

Einen Zusatzpunkt erhältst du, wenn du zwei Matrizen endlicher Ordnung findest, die $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ erzeugen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
In dieser Aufgabe wollen wir ein wenig Topologie betreiben. Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$.
X heißt *dicht* in $\mathbb{R}$, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $\varepsilon > 0$ ein $g \in G$ existiert mit $|x - g| < \varepsilon$.
X heißt *diskret* in $\mathbb{R}$, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ ein $t > 0$ existiert, so dass $\{g \in G : |g - x| < t\}$ endlich ist.
Aus der Analysis wissen wir zum Beispiel, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist.

a) Zeige, dass für eine Untergruppe G von $(\mathbb{R}, +)$ die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:
   (i) G ist zyklisch.
   (ii) Für alle $r > 0$ ist $G \cap [-r, r]$ endlich.
   (iii) Es gibt ein $r > 0$, so dass $G \cap [-r, r]$ endlich ist.
   (iv) G ist nicht dicht in $\mathbb{R}$.
   (v) G ist diskret in $\mathbb{R}$.

b) Zeige, dass die Menge $\{\pm 2^a 3^b : a, b \in \mathbb{Z}\}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt.
(*Hinweis:* Der Logarithmus log ist ein stetiger Gruppenisomorphismus von $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ nach $(\mathbb{R}, +)$.)

Abgabe der Übungsblätter:
Bitte wirf deine Lösung zu diesem Übungsblatt bis Donnerstag, 16. Mai 2013, 11:20 Uhr in den entsprechenden Abgabekasten im 1C-Teil des Allianzgebäudes oder gib sie deinem Übungsleiter direkt vor der Übung.

[1] Das muss nicht gezeigt werden, sondern ist eine schöne Aufgabe für das Tutorium.