Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein   Dipl.-Math. Jochen Schröder

Einführung in Algebra und Zahlentheorie – Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei G eine Gruppe mit Normalteilern $H, N \trianglelefteq G$. Desweiteren sei $N \subseteq H$. Zeige, dass gilt:

a) N ist ein Normalteiler in H.

b) H/N ist ein Normalteiler in G/N.

c) $(G/N)/(H/N) \cong G/H$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei G eine Gruppe. Der *Kommutator* $[G, G]$ sei diejenige Untergruppe von G, die von allen *Kommutatoren* $xyx^{-1}y^{-1}$ mit $x, y \in G$ erzeugt wird. Zeige die folgenden Aussagen:

a) $[G, G]$ ist ein Normalteiler in G.

b) Für einen Normalteiler $N \trianglelefteq G$ gilt: G/N ist abelsch $\Leftrightarrow [G, G] \subseteq N$.
Insbesondere ist $G^{ab} := G/[G, G]$ abelsch.

c) Bezeichne $\pi\colon G \to G^{ab}$ die kanonische Projektion. G^{ab} erfüllt die folgende Eigenschaft[1]:
Für jede abelsche Gruppe H und jeden Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon G \to H$ gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\overline{\varphi} : G^{ab} \to H$ mit $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Seien G und H Gruppen, $M \trianglelefteq G$ und $N \trianglelefteq H$ Normalteiler. Weiterhin sei $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige die folgenden Aussagen:

a) Das Urbild $\varphi^{-1}(N)$ ist ein Normalteiler in G.

b) Ist φ surjektiv, so ist $\varphi(M)$ ein Normalteiler in H.

c) Im Allgemeinen ist $\varphi(M)$ kein Normalteiler in H.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Gegeben seien die Gruppen $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{2\times 2} : \det(A) = 1\}$ und $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm I\}$.
In dieser Aufgabe wollen wir einsehen, dass $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ eine einfache Gruppe ist. Zeige dazu die folgenden Aussagen:

a) Alle Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$ bilden zusammen ein Erzeugendensystem von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Der Eintrag $*$ durchlaufe dabei ganz $\mathbb{C}$.

b) Sei $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Dann gibt es eine Matrix $S \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, so dass $S^{-1}AS$ in Jordan-Normalform ist.

c) Sei nun $N \trianglelefteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ mit $\{\pm I\} \subsetneq N$ gegeben. Dann enthält N alle Matrizen, wie sie in a) gegeben sind, und es gilt $N = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.
(*Hinweis:* Es ist hilfreich, die möglichen Jordan-Normalformen von $A \in N \setminus \{\pm I\}$ zu betrachten.)

d) $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ ist einfach.

Abgabe der Übungsblätter:
Bitte wirf deine Lösung zu diesem Übungsblatt bis Donnerstag, 23. Mai 2013, 11:20 Uhr in den entsprechenden Abgabekasten im 1C-Teil des Allianzgebäudes oder gib sie deinem Übungsleiter direkt vor der Übung.

[1] Man nennt dies die *universelle Abbildungseigenschaft* von G^{ab}.