Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie

PD Dr. Stefan Kühnlein   Dipl.-Math. Jochen Schröder

Einführung in Algebra und Zahlentheorie – Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte + 2 Sonderpunkte für b))
In dieser Aufgabe lernen wir eine Methode kennen, die Freiheit einer Gruppe zu zeigen.

a) Seien G eine Gruppe und $a, b \in G$ Elemente unendlicher Ordnung, die G erzeugen. Weiterhin sei $\bullet$ eine Gruppenoperation von G auf einer Menge M, so dass es nichtleere disjunkte Teilmengen $A, B \subset M$ gibt mit $a^z \bullet A \subseteq B$ und $b^z \bullet B \subseteq A$ für alle $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
Zeige, dass G frei in den Erzeugern a, b ist.

b) Sei nun $G = \langle\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\}\rangle$ eine Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
Zeige, dass G frei in zwei Erzeugern ist.
(*Hinweis:* G operiert auf $\mathbb{R}^2$ durch Matrizenmultiplikation. Finde $A, B \subset \mathbb{R}^2$, so dass die Bedingung aus a) erfüllt ist.)

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ und $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \det(A) = 1\}$.
Im Tutorium haben wir gesehen, dass durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bullet z = \frac{az + b}{cz + d}$$

eine Gruppenoperation von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{H}$ gegeben ist.

a) Zeige, dass die Operation transitiv ist.

b) Berechne den Stabilisator $\mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}(\mathrm{i})$.

c) Berechne $\{A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) : A \bullet z = z \text{ für alle } z \in \mathbb{H}\}$.

d) Finde eine Gruppe, die transitiv und treu[1] auf $\mathbb{H}$ operiert.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Seien p eine Primzahl, $r \in \mathbb{N}$ und G eine Gruppe mit p^r Elementen. Zeige:

a) Das Zentrum $Z(G)$ besteht nicht nur aus dem neutralen Element.

b) Ist $r = 2$, so ist G abelsch.

Aufgabe 4 (4 Punkte) – eine alte Klausuraufgabe
Es seien G eine endliche Gruppe, n eine natürliche Zahl und $M := \mathrm{Abb}(G, \{1, \ldots, n\})$. Auf M haben wir die Gruppenoperation $\bullet : G \times M \to M$, gegeben durch

$$(g \bullet f)(x) := f(xg) \text{ für alle } g, x \in G, f \in M.$$

a) Was sind die Fixpunkte dieser Operation? Wie viele davon gibt es?

b) Es seien $H \leq G$ eine Untergruppe und $n > 1$. Gib eine Abbildung $f \in M$ an, die H als Stabilisator hat.

c) Nun sei G zyklisch von Ordnung p, wobei p eine Primzahl ist.
Benutze die Bahnbilanzformel und a), um zu zeigen, dass $c^p - c$ für alle $c \in \mathbb{N}$ ein Vielfaches von p ist.
(Dies ist ein Beweis des kleinen Satzes von Fermat.)

Abgabe der Übungsblätter:
Bitte wirf deine Lösung zu diesem Übungsblatt bis Freitag, 31. Mai 2013, 11:30 Uhr in den entsprechenden Abgabekasten im 1C-Teil des Allianzgebäudes. Am 30. Mai ist Fronleichnam und der Übungsleiter front lieber Leichname als mit euch zu üben. Die Lösung des Übungsblattes wirst du bei Zeiten online finden.

[1] Eine Operation einer Gruppe G auf einer Menge M heißt *treu*, wenn kein Element außer e_G trivial operiert, das heißt, gilt $gm = m$ für alle m, so ist $g = e_G$.