Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein   Dipl.-Math. Jochen Schröder

Einführung in Algebra und Zahlentheorie – Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Die Begriffe „linear (un-)abhängig“ und „Erzeugendensystem“ sind in der Modulwelt definiert wie bei Vektorräumen. Eine Basis ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.

a) Finde einen kommutativen Ring R und einen R-Modul $M \neq \{0\}$, so dass jede nichtleere Teilmenge linear abhängig ist. Begründe, warum M keine Basis besitzt.

b) Gegeben sei $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{Z}$-Modul. Zeige, dass $\mathbb{Q}$ keine Basis besitzt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Gegeben sei der Monoidring $\mathbb{Z}[M]$ mit $M = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \cdot)$.

a) Einen halben Punkt erhältst du, wenn du ein allgemeines Element aus $\mathbb{Z}[M]$, das Ergebnis des Produktes zweier solcher Elemente sowie das Null- und das Einselement explizit angibst.

b) Bestimme nun die Einheitengruppe $\mathbb{Z}[M]^\times$.

c) Bestimme alle Nullteiler. Bestimme weiterhin für jeden Nullteiler $x \in \mathbb{Z}[M]$ die Menge

$$N_x = \{y \in \mathbb{Z}[M] : xy = 0\}.$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Seien R ein kommutativer Ring und A eine R-Algebra. Weiterhin sei $s \in A^\times$. Zeige, dass die Konjugation mit s, also die Abbildung $x \mapsto sxs^{-1}$, ein R-Algebren-Automorphismus von A ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Seien K ein Körper und $A = K^{2\times 2}$ die K-Algebra der 2×2-Matrizen über K. In A seien die Matrizen $e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Zeige die folgenden Aussagen:

a) A besitzt nur zwei Ideale. Folgere, dass jeder Endomorphismus[1] von A ein Isomorphismus ist.

b) Ist $\varphi \in \mathrm{Aut}_{K-\mathrm{Alg}}(A)$ ein Automorphismus von A, dann gibt es eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_2(K)$, so dass $\varphi(e_i) = S e_i S^{-1}$ für $i = 1, 2$ gilt.
(Eine mögliche Art, das zu zeigen, ist folgende: Warum ist $\varphi(e_i)$ konjugiert zu e_i und wieso ist sogar – ohne Einschränkung – $\varphi(e_1) = e_1$? Variiere die zweite Gleichung $\varphi(e_2) = T \cdot e_2 \cdot T^{-1}$ (mit $T \in \mathrm{GL}_2(K)$) geeignet durch Konjugation, ohne die Bedingung $\varphi(e_1) = e_1$ zu zerstören.)

c) In der Situation von b) gilt sogar $\varphi(M) = SMS^{-1}$ für alle $M \in A$.

d) Die Gruppen $\mathrm{Aut}_{K-Alg}(A)$ und $\mathrm{GL}_2(K)/\{aI_2 \mid a \in K^\times\}$ sind isomorph.

Abgabe der Übungsblätter:
Bitte wirf deine Lösung zu diesem Übungsblatt bis Donnerstag, 20. Juni 2013, 11:30 Uhr in den entsprechenden Abgabekasten im 1C-Teil des Allianzgebäudes oder gib sie deinem Übungsleiter direkt vor der großen Übung.

[1] als Endomorphismus von K-Algebren