Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie

PD Dr. Stefan Kühnlein   Dipl.-Math. Jochen Schröder

Einführung in Algebra und Zahlentheorie – Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Seien R ein Hauptidealring und $Q = \mathrm{Quot}(R)$ sein Quotientenkörper. Weiterhin seien $f \in R[X]$ ein normiertes Polynom und $q \in Q$ eine Nullstelle von f. Zeige, dass q bereits in R liegt.[1]

b) Zeige mit Hilfe von Aufgabenteil a), dass $\sqrt{3}$ irrational ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien $R \neq \{0\}$ ein kommutativer Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal.[2] Zeige die folgenden Aussagen:

a) I ist genau dann ein Primideal, wenn R/I nullteilerfrei ist.

b) I ist genau dann ein maximales Ideal, wenn R/I ein Körper ist.

Folgere, dass jedes maximale Ideal ein Primideal ist, und finde ein Beispiel dafür, dass die andere Richtung nicht gilt.

Aufgabe 3 (4 + 1 Punkte)
Die Menge R der stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$ wird zu einem Ring[3] durch

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ und } (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \text{ für alle } f, g \in R, x \in [0, 1].$$

Für $a \in [0, 1]$ definieren wir $I_a := \{f \in R : f(a) = 0\}$. Zeige die nachfolgenden Aussagen:

a) Für jedes $a \in [0, 1]$ ist I_a ein maximales Ideal von R.

b) Jedes Ideal $I \neq R$ ist in einem der I_a enthalten.

c) I_a wird nicht vom Polynom $X - a$ erzeugt.

d) Einen *Zusatzpunkt* erhältst du, wenn du zeigst, dass I_a kein Hauptideal ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte) (*Irreduzibilitätskriterium von Eisenstein*)

a) Sei $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X], a_n \neq 0$ mit $\mathrm{ggT}(a_0, ..., a_n) = 1$. Sei weiterhin $p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl, so dass $p \mid a_i$ für alle $i = 0, ..., n - 1$, aber $p^2 \nmid a_0$. Zeige, dass f in $\mathbb{Z}[X]$ irreduzibel ist.
(*Bemerkung:* $\mathbb{Z}$ kann hierbei durch jeden Hauptidealring ersetzt werden, wenn wir den Begriff „Primzahl“ durch „Primelement“ ersetzen. Man kann die Aussage dann genauso beweisen.)

b) Finde ein irreduzibles Polynom vom Grad 42 in $\mathbb{Z}[X]$.

Abgabe der Übungsblätter:
Bitte wirf deine Lösung zu diesem Übungsblatt bis Donnerstag, 04. Juli 2013, 11:30 Uhr in den entsprechenden Abgabekasten im 1C-Teil des Allianzgebäudes oder gib sie deinem Übungsleiter direkt vor der großen Übung.

[1] Man sagt, R ist in Q *ganz abgeschlossen*.
[2] Die Aussage ist auch richtig für $R = \{0\}$. Dann gibt es keine Primideale und keine maximalen Ideale und alle Faktorringe sind weder nullteilerfrei noch Körper – das ist ein recht langweiliger Fall.
[3] Das darf man glauben.