Stichwortliste zur Vorlesung

Elementargeometrie

Gabriela Weitze-Schmithüsen

Übungsleiterin: Anja Randecker

Karlsruhe, Sommersemester 2012

Kapitel 0: Eine Motivation

Eine kleine Einführung mit fünf Thesen zum Ziel der Vorlesung.

Kapitel I: Ausgewähltes aus der Euklidischen Geometrie

Im ersten Kapitel wollen wir die Euklidische Geometrie systematisch einführen. Zunächst lernen wir einige weiterführende Sätze kennen. Anschließend sehen wir die geschichtlichen Anfänge einer Axiomatisierung bei Euklid ca. 300 v. Chr, was bereits damals die Frage nach der Beweisbarkeit des Parallelenaxioms aufwarf. Herzstück der Vorlesung ist dann das Kennenlernen eines modernen Axiomensystems für die Euklidische Geometrie, des Axiomensystems von Kolmogorov. Die schrittweise Hinzunahme von Axiomen schränkt die dadurch beschriebenen Geometrien immer weiter ein, bis wir schließlich die Euklidische Geometrie erhalten. Wir sehen, dass $\mathbb{R}^2$ ein Modell ist und sogar bis auf Isomorphie das einzige.

1. Sätze im Dreieck

Im ersten Abschnitt geht es darum, einige weiterführende Sätze in der Euklidischen Geometrie kennen zu lernen. Diese verallgemeinern zum Teil bekannte Sachverhalte aus der Schulgeometrie bzw. stellen sie in einen allgemeineren Kontext.

1.1 Der Umfangswinkelsatz

Im Zentrum dieses Abschnitts steht der Umfangs- und der Mittelpunktswinkelsatz. Wir erhalten eine ganze Reihe bekannter Sätze wie z. B. Satz des Thales und Sehnen-/Tangentensatz als direkte Folgerung daraus.

Satz 1: Mittelpunktswinkelsatz; **Satz 2:** Umfangswinkelsatz; **Satz 3:** Satz des Thales; **Satz 4:** Umkehrung des Umfangswinkelsatzes; **Satz 5:** Sehnensatz; **Satz 6:** Sekantensatz; **Satz 7**: Tangentensatz; **Satz 8:** Umkehrung des Umfangswinkelsatzes; Satz des Pythagoras (in der Übung behandelt).

1.2 Die Sätze von Menelaos und Ceva

Die aus dem Schulunterricht bekannten Aussagen, dass sich Seitenhalbierende, Mittelsenkrechte, Höhen und Winkelhalbierende eines Dreiecks jeweils in einem Punkt schneiden, lassen sich alle aus einem Satz, dem Satz von Ceva, ableiten. Der Satz beantwortet die Frage, wann sich Ecktransversalen in einem Dreieck schneiden.

Orientierter Abstand; Teilverhältnisse; Transversale im Dreieck; **Satz 9:** Satz von Menelaos; **Satz 10:** Satz von Ceva; **Satz 11:** Umkehrung des Satzes von Ceva; **Satz 12:** Schnitt von Seitenhalbierenden, Winkelhalbierenden, Höhen und Mittelsenkrechten.

1.3 Eulergerade und Feuerbachscher Kreis

Die Eulergerade und der Feuerbachsche Kreis zu einem Dreieck enthalten eine ganze Reihe für das Dreieck bedeutender Punkte.

Satz 13: Satz von der Eulergeraden; **Satz 14:** Satz vom Fagnano-Dreieck; **Satz 15:** Satz vom Feuerbachkreis.

1.4 Billard im Dreieck

Als eine überraschende Anwendung des letzten Abschnitts bekommen wir eine Aussage über periodische Billardbahnen auf Billardtischen, die die Form eines spitzwinkligen Dreiecks haben. Für stumpfwinklige Dreiecke ist die analoge Frage überraschenderweise bis heute noch nicht gelöst.

Billard auf polygonalen Billardtischen; die periodische Fagnano-Bahn auf spitzwinkligdreieckigen Billardtischen; ein ungelöstes Problem für stumpfwinklige Dreiecke.

2. Der axiomatische Ansatz

In diesem Abschnitt setzen wir uns damit auseinander, wie die Euklidische Ebene axiomatisch eingeführt werden kann.

2.1 Euklids Elemente

Bereits ca. 300 v.Chr versuchte Euklid, ein Axiomensystem für die Euklidische Geometrie aufzustellen und daraus die bekannte Theorie abzuleiten. Auch wenn *das Axiomensystem selbst noch nicht wirklich den modernen Ansprüchen einer axiomatischen Theorie genügte, überrascht der exakte Aufbau und die präzise Beweisführung in seinen* Elementen*, die bis in die heutige Zeit zum Teil direkt übernommen werden können.*

Kurzer geschichtlicher Überblick; die fünf Postulate.

2.2 Regelmäßige Polygone und goldener Schnitt

Ein wichtiger Bestandteil von Euklids Elementen sind geometrische Konstruktionen. Als ein Beispiel betrachten wir die Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks.

Der goldene Schnitt; Konstruktion des goldenen Schnitts; **Satz 16:** Konstruierbarkeit des regelmäßigen Fünfecks.

2.3 Neuzeitliche Axiomensysteme

In einem kurzen Abschnitt beschreiben wir die Vorgehensweise und Ziele eines axiomatischen Zugangs zu einer Theorie und wenden uns dann den Grundbegriffen für Axiomensysteme, die Geometrien beschreiben, zu.

Allgemeine Eigenschaften von Axiomensystemen; Inzidenzstrukturen; einfache Inzidenzstrukturen.

2.4 Das Axiomensystem nach Kolmogorov

In diesem Abschnitt führen wir schrittweise die fünf Axiomengruppen des Axiomensystems der Euklidischen Ebene nach Kolmogorov ein und sehen nach jedem Schritt einige Eigenschaften der Geometrien, die die Axiome bis dahin erfüllen.

Axiomengruppe I: Inzidenzaxiome; erste Eigenschaften und Beispiele;
Axiomengruppe II: Abstandsaxiome; Definitionen und erste Eigenschaften;
Axiomengruppe III: Anordnungsaxiome; der Satz von Pasch; Winkel; Bewegungen; **Satz 17:** Invariante Eigenschaften von Bewegungen; Fixpunkte von Bewegungen; Existenz von höchstens zwei Bewegungen zu vorgegebener Strecke und Bildstrecke;
Axiomengruppe IV: das Bewegungsaxiom; **Satz 18**: Existenz von genau zwei Bewegungen; **Satz 19:** der Fahnensatz; Elementarbewegungen: Geradenspiegelung, Punktspiegelung, Drehung, Translation;
Axiomengruppe V: das Parallelenaxiom.

2.5 Die absolute Ebene

In diesem Abschnitt untersuchen wir, welche Aussagen, die wir aus der Euklidischen Ebene kennen, bereits in der absoluten Ebene gelten. Das heißt, dass man *für ihren Beweis das Parallelenaxiom nicht braucht. Insbesondere gelten die Eigenschaften dann auch in der Poincaré-Halbebene, die wir in Kapitel II einführen.*

Kongruenz; Abtragen von Winkeln; Kongruenzsätze in der absoluten Ebene: **Satz 20:** sss, **Satz 21:** sws, **Satz 22:** wsw; Basiswinkel von gleichschenkligen Dreiecken; Mittelpunkte und Winkelhalbierende; Nebenwinkel und Scheitelwinkel; spitze, stumpfe und rechte Winkel; Lote und Mittelsenkrechte; die Mittelsenkrechte als Ort der Punkte mit gleichem Abstand.

2.6 Winkelsumme im Dreieck

Ein entscheidender Unterschied zwischen allgemeinen absoluten Ebenen und Euklidischen Ebenen ist, dass im Allgemeinen in einer absoluten Ebene die Winkelsumme im Dreieck nicht π sein muss. In diesem Abschnitt zeigen wir, dass sie aber zumindest $\leq \pi$ ist. Außerdem gilt, dass falls die Winkelsumme in einem Dreieck der Ebene tatsächlich gleich π ist, dann ist sie es auch in allen Dreiecken.

Winkelgröße und Winkelmaß; **Satz 23:** Größerer Winkel und längere Seite in einem Dreieck; Abstand Punkt zu Gerade; **Satz 24:** Innenwinkelsumme von Dreiecken in der absoluten Ebene; **Satz 25:** Absolute Ebenen mit Dreiecken mit Winkelsumme π.

2.7 Das Parallelenaxiom

In diesem Abschnitt lernen wir eine ganze Reihe von Bedingungen kennen, die äquivalent zum Parallelenaxiom sind.

Stufenwinkelsatz; **Satz 26:** Satz über Parallelen durch einen vorgegebenen Punkt in absoluten Ebenen; **Satz 27:** Aussagen, die zum Parallelenaxiom äquivalent sind; Saccheri-Vierecke; **Satz 28:** Äquivalente Eigenschaften zum Parallelenaxiom über Abstandslinien und Saccheri-Vierecke.

3. Die Standardebene des $\mathbb{R}^2$

Ein Modell für die Euklidische Ebene ist der $\mathbb{R}^2$ versehen mit der Standard-Metrik. In diesem Abschnitt sehen wir, dass dies (bis auf Isomorphie) das einzige Modell ist.

Satz 29: Der $\mathbb{R}^2$ als eindeutiges Modell der Euklidischen Ebene.

4. Winkelgrößen und Winkelmaß

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass das Winkelmaß eine klassifizierende Invariante für die Kongruenzklassen von Winkeln ist, das heißt zwei Winkel sind genau dann kongruent, wenn ihr Winkelmaß übereinstimmt.

Eigenschaften von Winkelgrößen und Winkelmaß; **Satz 30:** Äquivalenz von Winkelmaßgleichheit und Kongruenz.

Kapitel II: Die hyperbolische Ebene

In diesem Kapitel lernen wir nun eine absolute Ebene kennen, die nicht Euklidisch ist. Insbesondere zeigt dies die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms.

1. Das Modell obere Halbebene

1.1 Inzidenzstruktur

Wir definieren auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ *die Inzidenzstruktur* $(P_{\mathbb{H}}, \mathbb{G}_{\mathbb{H}})$.

Die hyperbolische Ebene; hyperbolische Geraden von Typ I und Typ II; uneigentliche Punkte; $(P_{\mathbb{H}}, \mathbb{G}_{\mathbb{H}})$.

1.2 Definition einer Metrik in spe

In diesem Abschnitt definieren wir nun die hyperbolische Metrik $d_{\mathbb{H}}$ *auf* $\mathbb{H}$ *mit Hilfe von Teilverhältnissen. Wir werden erst später zeigen, dass* $d_{\mathbb{H}}$ *eine Metrik ist.*

Doppelverhältnisse; Definition von $d_{\mathbb{H}}$; erste Eigenschaften von $d_{\mathbb{H}}$; Beispiele für Abbildungen, die $d_{\mathbb{H}}$ erhalten.

1.3 Inversion am Kreis

Eine Inversion am Kreis ist eine Selbstabbildung des $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, *die die Ebene in gewisser Weise an einem Kreis „spiegelt".*

Inversion am Kreis; Inversion als Involution; Fixpunkte; Geradentreue; eine Konstruktionsanleitung; reelles Doppelverhältnis; **Satz 30:** Geraden-, Winkel- und Doppelverhältnistreue der Inversion am Kreis.

1.4 Bewegungen in spe

Wir lernen die Gruppe der Möbiustransformationen kennen und sehen, dass sie $d_{\mathbb{H}}$ *erhalten.*

Berechnung von $d_{\mathbb{H}}$ über das reelle Doppelverhältnis; verallgemeinerte Möbiustransformationen; Inversion am Kreis als Selbstabbildung von $\mathbb{H}$, die $d_{\mathbb{H}}$ erhält; verallgemeinerte Möbiustransformationen erhalten $d_{\mathbb{H}}$.

1.5 $\mathbb{H}$ als absolute Ebene

In diesem Abschnitt zeigen wir nun, dass $d_{\mathbb{H}}$ eine absolute Ebene aber keine Euklidische Ebene ist und bestimmen die Isometriegruppe.

$d_{\mathbb{H}}$ ist Metrik; **Satz 31:** Hyperbolische Ebene als absolute Ebene; Winkelmaß von hyperbolischen Winkeln; **Satz 32:** Die Isometriegruppe der hyperbolischen Ebene.

Kapitel III: Die Projektive Ebene

Als eine weitere axiomatisch definierte Geometrie lernen wir die projektive Ebene kennen. Motivation ist, eine Vervollständigung der Euklidischen Ebene zu finden, in der sich alle Geraden schneiden.

1. Das Axiomensystem

In diesem Abschnitt definieren wir zunächst projektive Ebenen und lernen erste Eigenschaften wie das Dualitätsprinzip kennen.

Axiomensystem der projektiven Ebene; die Fano-Ebene; die projektive Ebene $\mathbb{P}^2(K)$ zu einem (Schief-)Körper K; die duale projektive Ebene; **Satz 32:** das Dualitätsprinzip; Gleichmächtigkeit von Geraden in einer projektiven Ebene.

2. Endliche projektive Ebenen

Wie rigide die projektiven Axiome sind, zeigt sich schön bei endlichen projektiven Ebenen. Eigenschaften wie die Anzahl der Punkte und Geraden sind festgelegt und hängen nur von der Ordnung der Ebene ab. Welche endlichen projektiven Ebenen es gibt, ist ein bis heute offenes Problem.

Die Ordnung einer endlichen projektiven Ebene; Anzahl der Geraden durch einen Punkt; Anzahl der gesamten Punkte bzw. Geraden; die Frage nach den möglichen Ordnungen als ungelöstes Problem.

3. Projektive Ebenen der Form $\mathbb{P}^2(K)$

Besonders wichtige Beispiele für projektive Ebenen sind die $\mathbb{P}^2(K)$ für beliebige (Schief-)Körper K. In diesem Abschnitt sehen wir, dass diese als projektive Vervollständigungen des K^2 aufgefasst werden können. Wir lernen den Satz von Desargues und den Satz von Pappus kennen und sehen ein Beispiel einer projektiven Ebene, die kein $\mathbb{P}^2(K)$ ist.

Einbettung von K^2 in den $\mathbb{P}^2(K)$; der $\mathbb{P}^2(K)$ ist isomorph zu seiner dualen Ebene;

Satz 33: Satz von Desargues für den $\mathbb{P}^2(K)$ mit K ist (Schief-)Körper; **Satz 34:** Satz von Pappus für den $\mathbb{P}^2(K)$ mit K ist Körper; die Hamilton-Quaternionen; die Moulton-Ebene als Beispiel einer projektiven Ebene, die kein $\mathbb{P}^2(K)$ ist.

Kapitel IV: Abspann

Mit dem Erlangener Programm, das Felix Klein 1872 in seiner Antrittsvorlesung für seine Professur in Göttingen vorstellte, brachte Klein die Idee in den Mittelpunkt, Geometrien über ihre Isometriegruppen zu untersuchen. Er hob damit den engen Zusammenhang zwischen Geometrie und Algebra hervor, der in der heutigen Geometrie eine wichtige Rolle spielt.
Zum Abschluss zeigt uns ein ungelöstes Problem aus der Inzidenzgeometrie, dass es selbst in diesem Rahmen noch mathematische Fragen gibt, die bis heute unbeantwortet sind.

Literatur: Die Vorlesung lehnt sich über weite Strecken eng an das Skript *Elemente der Geometrie* von Prof. Dr. Günter Aumann an.
Weitere Literatur zu dem Thema findet sich unter:
`http://www.math.kit.edu/iag3/lehre/elemgeo2012s/de`