Karlsruher Institut für Technologie

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

11. Juli 2012

JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen   Dipl.-Math. oec. Anja Randecker

Elementargeometrie – Übungsblatt 13

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Gegeben seien zwei Punkte w, z im Modell obere Halbebene. Zeige $d_{\mathbb{H}}(z,w) = \ln \frac{|z-\overline{w}|+|z-w|}{|z-\overline{w}|-|z-w|}$.

Hinweis: Zeige, dass die rechte Seite invariant unter verallgemeinerten Möbiustransformationen ist, und betrachte dann w und z in einer für dich geschickten Lage.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Finde einen Kreis, so dass die Inversion an diesem Kreis das Modell obere Halbebene auf das Kreisscheibenmodell abbildet. Zeige damit, welche Linien im Kreisscheibenmodell Geraden sind.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Zeige, dass die Axiome der projektiven Ebene voneinander unabhängig sind, indem du für je drei Axiome ein Beispiel angibst, in dem diese drei erfüllt sind, das vierte Axiom aber nicht.

Aufgabe zum Nachdenken 4 (keine Abgabe)

Zeige, dass die Geometrie $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ die Anordnungsaxiome (III) erfüllt.

Aufgabe zum Nachdenken 5 *Satz von Gauß-Bonnet* (keine Abgabe)

Für ein hyperbolisches Dreieck Δ mit den Innenwinkeln α, β und γ kann der Flächeninhalt $\mu(\Delta)$ beschrieben werden durch $\mu(\Delta) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$. Warum ist diese überraschende Formel sinnvoll? Suche dir ein paar Beispiele für „große“ und „kleine“ Dreiecke.

Aufgabe zum Nachdenken 6 (keine Abgabe)

Finde eine projektive Geometrie mit 13 Punkten. Wie sehen die Geraden aus? Wie kann man diese Geometrie veranschaulichen?

Warum wäre es eine gemeine Aufgabe, eine projektive Geometrie mit 41 oder 43 Punkten suchen zu lassen?

Aufgabe zum Nachdenken 7 (keine Abgabe)

Gegeben sei eine endliche projektive Ebene mit Ordnung q. Welche Ordnung hat die duale Ebene?

Bitte wenden!

Aufgabe zum Nachdenken 8 *Satz von Desargues* (keine Abgabe)
Gegeben seien sechs Punkte $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ in einer euklidischen Ebene, so dass sich die Geraden A_1B_1, A_2B_2 und A_3B_3 in einem gemeinsamen Punkt schneiden. Zeige: Ist A_1A_2 parallel zu B_1B_2 und ist A_2A_3 zu B_2B_3 parallel, so ist auch A_1A_3 zu B_1B_3 parallel.

Aufgabe zum Nachdenken 9 (keine Abgabe)
Zeige, dass die sphärische Geometrie eine projektive Geometrie ist.

Abgabe bis Mittwoch, 18. Juli 2012, vor Beginn der Übung oder bis 15.00 Uhr in den Kasten im 1. Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.