Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

16. Mai 2012

JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen Dipl.-Math. oec. Anja Randecker

Elementargeometrie – Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (2 Punkte)

a) Gib für alle natürlichen $n \geq 3$ eine Inzidenzstruktur $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \in)$ mit $|\mathbf{P}| = |\mathbf{G}| = n$ an, die die Inzidenzaxiome (I) erfüllt.

b) Gegeben sei eine Inzidenzstruktur, die die Inzidenzaxiome (I) erfüllt. Auf wie vielen Geraden muss ein Punkt mindestens liegen?

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Sei $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \in)$ eine Inzidenzstruktur, welche die Inzidenzaxiome (I) und die Abstandsaxiome (II) erfüllt. Zeige für $A, B \in \mathbf{P}$ $(A \neq B)$:

a) $AB^+ \cap BA^+ = \overline{AB}$

b) $AB^- \cap BA^- = \emptyset$

c) $AB^+ \supset BA^-$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben sind die folgenden zwei Geraden-Inzidenzstrukturen $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \in)$ jeweils zusammen mit einer Abstandsfunktion $d\colon \mathbf{P} \times \mathbf{P} \to \mathbb{R}$. Überprüfe jeweils, welche der Inzidenzaxiome (I) und Abstandsaxiome (II) erfüllt sind.

a) $\mathbf{P} = \mathbb{F}_2^3 \setminus \{0\}$
$\mathbf{G} = \{AB \mid A, B \in \mathbf{P}, A \neq B\}$ mit $AB := \{A, B, A + B\}$
$d(A,B) = \sum_{i=1}^{3} |A_i - B_i|$ mit $|\bar{0}| = 0, |\bar{1}| = 1$, wobei $\bar{0}, \bar{1} \in \mathbb{F}_2$ und $0, 1 \in \mathbb{R}$ sein sollen.

b) $\mathbf{P} = \mathbb{R}^2$
$\mathbf{G} = \{AB \mid A, B \in \mathbf{P}, A \neq B\}$ mit $AB := \{\lambda \cdot A \mid \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} \cup \{\mu \cdot B \mid \mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$
$$d(A,B) = \begin{cases} \|A - B\| & \text{falls } \{A, B\} \text{ linear abhängig} \\ \|A\| + \|B\| & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{mit } \|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Notation: In Teil a) ist $\mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen und $\mathbb{F}_2^3$ der dreidimensionale Standardvektorraum darüber. Ein Element dieses Vektorraums schreiben wir als Koordinatenvektor $A = (A_1, A_2, A_3)$ mit $A_i \in \mathbb{F}_2$ für $i \in \{1, 2, 3\}$. In Teil b) bezeichnet $\mathbb{R}^2$ den zweidimensionalen Standardvektorraum über $\mathbb{R}$. Auf allen Vektorräumen ist eine Vektoraddition $+$ und eine Skalarmultiplikation $\cdot$ definiert.

Bitte wenden!

Aufgabe zum Nachdenken 4 (keine Abgabe)

Zeige, dass die Inzidenzaxiome (I) voneinander unabhängig sind, indem du Beispiele angibst.

Aufgabe zum Nachdenken 5 (keine Abgabe)

In der Zwergen-WG gab es mal wieder Ärger wegen der Aufteilung der Haushaltspflichten: Es mussten Bettchen gemacht werden, Brötchen gebacken, Tellerchen gespült, Zimmerchen gefegt und Blümchen gegossen. Es dabei allen 15 Zwergen recht zu machen, schien ein Ding der Unmöglichkeit: Für jede der Aufgaben brauchte man täglich drei Zwerge, die sich ihrer annahmen. Aber die Zwerge waren von all dieser Arbeit derart gereizt, dass je zwei von ihnen immer nur an einem Tag der Woche gemeinsam arbeiten konnten; sonst flogen die Fetzen.

Mit der Lösung des Problems betrauten sie schließlich Oberschlau, der schon aufgrund seines Namens dazu bestimmt schien. „Das ist doch nur axiomatische Geometrie", meinte dieser dann auch tatsächlich, sehr zur Irritation seiner Mitbewohner. „Nehmen wir uns Zwerge als Menge der Punkte $\mathbf{P}$ und die Einsatzteams aus drei Zwergen als Menge der Geraden $\mathbf{G}$. Wenn wir jetzt noch die Teams jedes Wochentages zu einer *Fünferschar* zusammenfügen, genügt es, wenn wir eine Geometrie finden, die folgende Axiome erfüllt:

- $|\mathbf{P}| = 15$.
- Je zwei Punkte liegen auf einer eindeutigen Geraden.
- Alle Geraden enthalten je genau drei Punkte.
- Jede Gerade ist in einer eindeutigen Fünferschar enthalten.
- Jede Fünferschar besteht aus einer Menge von fünf parallelen Geraden, deren Vereinigung ganz $\mathbf{P}$ ist.

Das ist aber einfach, macht das selbst. Ich lese solange noch ein bisschen in den Elementen." Sprach's und ließ die Tür hinter sich ins Schloss fallen.

Hilf Oberschlaus Mitbewohnern, indem du ihnen erklärst, wieso dieser Recht hat und gib eine Geraden-Inzidenzstruktur $(\mathbf{P}, \mathbf{G}, \in)$ an, die das Problem der Zwergen-WG löst.

Abgabe bis Mittwoch, 23. Mai 2012, vor Beginn der Übung oder bis 15.00 Uhr in den Kasten im 1. Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.