

## Elementargeometrie – Übungsblatt 8

### Aufgabe 1 *Problem von Sylvester* (5 Punkte)

- a) Gegeben seien in einer absoluten Ebene die kollinearen Punkte  $P_2, P_3, P_4$  und  $A$ , so dass  $P_2$  zwischen  $P_3$  und  $A$  liegt,  $P_4$  jedoch nicht. Weiter sei der Punkt  $P_1 \notin P_2P_3$  gegeben. Zeige, dass für jeden Punkt  $P_5 \in P_1P_3 \setminus \{P_1, P_3\}$  eine der Geraden  $P_2P_5$  oder  $P_4P_5$  die offene Strecke  $(P_1A)$  schneidet.

Hinweis: Das Korollar zum Satz von Pasch könnte dir auch hier wieder helfen.

- b) Beweise folgenden Satz für die absolute Ebene:

*Für jede endliche Menge von Punkten gilt: Entweder liegen alle Punkte auf einer Geraden oder es gibt eine Gerade, die genau zwei dieser Punkte enthält.*

Hinweis: Versuche hierfür, die Situation aus a) auf folgende Weise für einen Widerspruchsbeweis zu nutzen:

- Wähle einen Punkt  $Q$  auf einer Geraden durch zwei der gegebenen Punkte, so dass  $P_1Q$  außer  $P_1$  keinen der gegebenen Punkte enthält.
- Wähle  $A$  auf  $P_1Q^+$ , so dass  $A$  auf einer Geraden durch zwei der gegebenen Punkte liegt, die offene Strecke  $(P_1A)$  jedoch von keiner Geraden durch zwei der gegebenen Punkte geschnitten wird.

### Aufgabe 2 (3 Punkte)

Zeige, dass folgende Aussagen, die wir aus der euklidischen Geometrie kennen, mit folgenden leichten Modifikationen auch in der absoluten Geometrie gelten:

- a) Falls sich zwei Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden, so liegt deren Schnittpunkt auch auf der dritten Mittelsenkrechten.
- b) In einem Viereck, das einen Umkreis hat, ist die Summe zweier gegenüberliegender Winkel gleich der Summe der beiden übrigen Winkel.

*Hinweis: Unter einem Viereck  $ABCD$  verstehen wir hier die Punktmenge  $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$ , wobei  $A, B, C, D$  vier Punkte sind, von denen jeweils drei nicht kollinear sind und für die  $A \in \text{In } \angle BCD$  und  $C \in \text{In } \angle DAB$  gilt.*

### Aufgabe zum Nachdenken 3 (keine Abgabe)

Beweise Bemerkung 2.54 aus der Vorlesung.

Bitte wenden!

**Aufgabe zum Nachdenken 4** (keine Abgabe)

Gelten die Aussagen über Winkel auch für sphärische Dreiecke? Müssen zum Beispiel zwei Innenwinkel spitz sein? Was lässt sich über die Innenwinkelsumme sagen?

**Aufgabe zum Nachdenken 5** (keine Abgabe)

Finde ein Dreieck in einer absoluten Ebene, bei dem sich die Mittelsenkrechten paarweise nicht schneiden.

Ist auch die Umkehrung der Aussage von Aufgabe 2 b) erfüllt?

**Abgabe** bis Mittwoch, 13. Juni 2012, vor Beginn der Übung oder bis 15.00 Uhr in den Kasten im 1. Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.