Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

13. Juni 2012

JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen   Dipl.-Math. oec. Anja Randecker

Elementargeometrie – Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen in einer absoluten Ebene:

i) Parallelenaxiom (V): Zu jeder Geraden g und jedem Punkt P mit $P \notin g$ gibt es höchstens eine Gerade, die P enthält und zu g parallel ist.

ii) Euklids fünftes Postulat: „Wenn eine Gerade zwei Geraden trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte, so sollen die beiden Geraden, ins Unendliche verlängert, schließlich auf der Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte."

iii) Für je drei Geraden g_1, g_2, g_3 folgt aus $g_1 \parallel g_2$ und $g_2 \parallel g_3$ schon $g_1 \parallel g_3$ oder $g_1 = g_3$.

iv) Es gibt einen spitzen Winkel, so dass jede Gerade, die senkrecht auf einem Schenkel steht, den anderen Schenkel schneidet.
Hinweis: Finde eine Folge von Dreiecken, deren Innenwinkelsumme immer kleiner wird.

v) Es gibt eine Gerade g und einen Punkt P mit $P \notin g$, so dass es höchstens eine Gerade gibt, die P enthält und zu g parallel ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Gegeben sei in einer absoluten Ebene ein Dreieck ΔABC, das bei C einen rechten Winkel hat und für das C auf einem Kreis mit Durchmesser $\overline{AB}$ liegt.

Zeige, dass dann der Satz des Thales gilt: Alle Umfangswinkel über einem Durchmesser eines beliebigen Kreises sind rechte Winkel.

Aufgabe zum Nachdenken 3 (keine Abgabe)
Gegeben sei ein konvexes Viereck $ABCD$ in einer absoluten Ebene. Die Innenwinkel dieses Vierecks sind die Winkel $\measuredangle ABC$, $\measuredangle BCD$, $\measuredangle CDA$ und $\measuredangle DAB$, die Summe der Maße der Innenwinkel bezeichnen wir mit IWS($ABCD$). Zeige:

a) In jedem konvexen Viereck $ABCD$ gilt IWS($ABCD$) $\leq 2\pi$.

b) Falls ein konvexes Viereck $ABCD$ mit IWS($ABCD$) $= 2\pi$ existiert, so gilt das Parallelenaxiom (V). In diesem Fall gilt IWS($ABCD$) $= 2\pi$ für jedes konvexe Viereck $ABCD$.

Bitte wenden!

Aufgabe zum Nachdenken 4 (keine Abgabe)

Wie viele Punkte muss eine Inzidenzstruktur, die die Axiomengruppe (I) erfüllt, mindestens haben, damit sie das Parallelenaxiom (V) erfüllen kann? Welche Unterschiede ergeben sich, wenn man jeweils höchstens bzw. genau eine Parallele fordert?

Aufgabe zum Nachdenken 5 (keine Abgabe)

Finde zwei parallele Geraden in einer absoluten Ebene, an denen es sowohl kongruente als auch nicht-kongruente Stufenwinkel gibt.

Abgabe bis Mittwoch, 20. Juni 2012, vor Beginn der Übung oder bis 15.00 Uhr in den Kasten im 1. Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.