Karlsruher Institut für Technologie

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Fabian Januszewski

Endliche Gruppenschemata

Vorlesung im Sommersemester 2017

Unter den ersten Objekten der Algebra, die bereits in der Linearen Algebra eingeführt werden, sind *Gruppen*. Diese treten oft in Gestalt von Symmetrien auf, beispielsweise als Symmetrien der Lösungen algebraischer Gleichungen in der Galoistheorie.

In dieser Vorlesung werden wir Gruppen nicht primär durch Symmetrie motiviert betrachten, sondern als eigenständige Objekte, welche wir mit einer Zusatzstruktur versehen: der Struktur einer *algebraischen Varietät* beziehungsweise allgemeiner der Struktur eines *Schemas*.

Dies führt in natürlicher Weise zum Begriff des *Gruppenschemas*: Dies sind Schemata (z. B. algebraische Varietäten), welche zugleich Gruppen sind und deren Gruppenstruktur mit der algebraischen Struktur verträglich ist. Dabei bilden die *algebraischen Gruppen*, d. h. die Gruppenschemata, welche insbesondere algebraische Varietäten sind, eine wichtige Unterklasse.

Beispiele für algebraische Gruppen sind die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}(n)$, die spezielle lineare Gruppe $\mathrm{SL}(n)$, die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(n)$, etc.

Weitere Beispiele für Gruppenschemata sind die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln μ_n, sowie das konstante Gruppenschema $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Letzteres ist keine algebraische Gruppe, wenn der Grundkörper nicht die n-ten Einheitswurzeln enthält.

Analog zur Theorie der Lie-Gruppen (d. h. Gruppen, welche zugleich glatte reelle Mannigfaltigkeiten sind), in welcher Argumente aus der Differentialgeometrie eine zentrale Rolle spielen, spielt die Algebra und allgemeiner die algebro-geometrische Intuition eine zentrale Rolle im Studium von Gruppenschemata.

Hierbei werden wir uns auf *endliche* Gruppenschemata *über Körpern* beschränken, was es uns erlauben wird, auf das Gros der in den vertiefenden Vorlesungen über algebraische Geometrie eingeführten Theorien zu verzichten und die notwendige Geometrie in der Vorlesung selbst zu entwickeln.

Es wird sich herausstellen, daß endliche Gruppenschemata verschiedene Inkarnationen haben, welche alle für uns von Relevanz sind. Beispielsweise ist ein endliches Gruppenschema G über einem Körper k nichts anderes als eine endlichdimensionale kommutative k-Algebra H über k ist, welche zugleich die Struktur einer Coalgebra trägt.

Hierbei kodiert die Algebren-Struktur auf H die geometrische Struktur von G als Schema und die Coalgebren-Struktur ist für die Gruppenstruktur verantwortlich. Wenn G kommutativ ist, dann lassen sich die Rollen dieser beiden Strukturen vertauschen, indem wir zum Dualraum H^* übergehen. Auf diese Weise erhalten wir einen Dualitätsbegriff für endliche kommutative Gruppenschemata, welcher sich als sehr nützlich erweisen wird.

Unser Ziel wird es sein, endliche kommutative Gruppenschemata über perfekten Körpern zu klassifizieren. Dabei werden wir viele Begriffe und Eigenschaften von Schemata kennenlernen, welche in der modernen algebraischen Geometrie eine zentrale Rolle spielen und in der Theorie der Gruppenschemata unverzichtbar sind.

Die Theorie der Gruppenschemata ist aus der modernen algebraischen Geometrie und der Zahlentheorie nicht wegzudenken. Der Beweis von Fermats Letztem Satz wäre ohne die Theorie der endlichen Gruppenschemata nicht möglich gewesen.

Voraussetzung: Das Modul *Algebra* wird vorausgesetzt. Kenntnisse aus den Modulen *Algebraische Geometrie* und *Geometrie der Schemata* sind hilfreich, jedoch nicht notwendig.
Termin: Montags 9:45-11:15 im SR -1.017 (UG).