Nachtrag über euklidische Ringe

Sie erhalten hier Beweise zum Lemma über euklidische Ringe, die in der Vorlesung weggelassen wurden, weil die Aussagen in den am meisten interessierenden Spezialfällen $R = \mathbb{Z}$ und $R = K[X]$ ohnehin klar sind. Wer über allgemeine euklidische Ringe Bescheid wissen will, sollte die Beweise genau nachlesen.

Lemma Sei R ein euklidischer Ring. Dann existiert eine Abbildung $gr : R \to \mathbb{N}$, für die R euklidisch ist und zusätzlich gilt:
(i) Für $e \in R^\times$ und $a \in R$ gilt $gr(ea) = gr(a)$.
(ii) Ist $a, b \in R$, $a \neq 0$ und b ein Teiler von a, so ist $gr(b) \leq gr(a)$, bei echtem Teiler ist sogar $gr(b) < gr(a)$.
Beweis:
(i) Wir gehen von dem euklidischen Ring (R, gr) aus und verwenden

$$gr^*(a) := \min\{gr(ea) \mid e \in R^\times\}.$$

Dieses Minimum existiert, da jede nichtleere Menge natürlicher Zahlen ein Minimum besitzt, und wegen $R^\times ea = R^\times a$ ist offenbar $gr^*(ea) = gr^*(a)$.
Nun ist zu beweisen: R ist euklidisch bezüglich gr^*.
Im Folgenden sei stets $a, b \neq 0$.
Zu b gibt es ein $e \in R^\times$ mit $gr(eb) = gr^*(b)$. Dividiert man mit Rest a durch eb, so wird $a = qeb + r$ mit $r = 0$ oder $gr^*(r) \leq gr(r) < gr(eb) = gr^*(b)$. Dieses r ist also auch bezüglich gr^* als Rest bei Division von a durch b verwendbar. (i) ist also für die Größenfunktion gr^* richtig, die wir nun wieder mit gr bezeichnen wollen.
(ii) Wir zeigen (1.Schritt) $b \mid a \Rightarrow gr(b) \leq gr(a)$.
Annahme: Das ist falsch. Dann gibt es Gegenbeispiel, nämlich ein Paar (a, b) mit $b \mid a$, $a \neq 0$ und $gr(b) > gr(a)$. Unter den a mit $\exists b$ mit $b \mid a$ und $gr(b) > gr(a)$ gibt es eins mit minimalem $gr(a)$. Ist also $gr(a') < gr(a)$, so folgt aus $b \mid a'$ immer $gr(b) \leq gr(a')$.
Wir dividieren mit Rest: $b = qa + r$ mit $r = 0$ oder $gr(r) < gr(a)$. $r = 0$ führt zu $a \mid b$. Wegen $b \mid a$ gibt es nach 1.2, Satz über elementare Teilbarkeitseignschaften (iii), eine Einheit e mit $a = eb$, also $gr(a) = gr(b)$, Widerspruch. Die andere Möglichkeit, nämlich $gr(r) < gr(a)$, führt ebenfalls zu einem Widerspruch. Aus $b \mid a$ folgt $b \mid b - qa = r$ und da r ein a' wie oben ist, erhält man den Widerspruch $gr(b) \leq gr(r) < gr(a)$. Die Annahme muss also verworfen werden, und die Aussage ist richtig.
Verbleibt (2. Schritt): Ist b ein echter Teiler von a, so ist $gr(b) < gr(a)$.
Denn bei Division mit Rest $b = qa + r$ geht $r = 0$ nicht, da wie im 1. Schritt $a = eb$ mit $e \in R^\times$ wäre, also b kein *echter* Teiler. Also ist $gr(r) < gr(a)$ und $b \mid r$, nach dem 1. Schritt also $gr(b) \leq gr(r) < gr(a)$ und somit $gr(b) < gr(a)$, was zu zeigen war. **q.e.d.**