Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Ute Luhm
Dr. Florian Nisbach

16. 10. 2012

Funktionentheorie II – Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ (für allgemeine topologische Räume X geht das genauso) und $x_0 \in X$. Mit

$$W_{x_0}(X) := \{\gamma : [0,1] \to X \text{ stetig } \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}$$

bezeichnen wir die Menge der geschlossenen Wege in X mit Anfangspunkt x_0.

a) Zeige, dass Homotopie (mit festgehaltenem Anfangs- und Endpunkt) auf $W_{x_0}(X)$ eine Äquivalenzrelation ist. Die Menge der Homotopieklassen bezeichnen wir mit $\pi_1(X, x_0)$.

b) Für zwei Wege $\gamma, \delta \in W_{x_0}(X)$ sei die Verkettung $\delta * \gamma$ definiert durch

$$\delta * \gamma : [0,1] \to \mathbb{C},\ t \mapsto \begin{cases} \gamma(2t) & (0 \leq t < \frac{1}{2}) \\ \delta(2t-1) & (\frac{1}{2} \leq t \leq 1) \end{cases}.$$

Zeige, dass $\delta * \gamma \in W_{x_0}(X)$ gilt, und dass die Homotopieklasse $[\delta * \gamma]$ nur von $[\delta]$ und $[\gamma]$ abhängt.

c) Zeige, dass $\pi_1(X, x_0)$ mit der von $*$ induzierten Verknüpfung eine Gruppe bildet. Sie heißt *Fundamentalgruppe* von X mit Basispunkt x_0.

d) Es gebe einen Weg in X von x_0 nach $x' \in X$. Zeige, dass $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x')$ als Gruppen isomorph sind.

e) Sei $S \subseteq C$ ein Sterngebiet und $x_0 \in S$. Zeige, dass $\pi_1(S, x_0)$ die triviale Gruppe ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Wir wollen nun die Fundamentalgruppe von $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ausrechnen. Zeige dazu:

a) Die Abbildung $\chi : \tilde{W_1}(\mathbb{C}^\times) \to \mathbb{Z},\ \gamma \mapsto \operatorname{ind}_\gamma(0)$ ist auf Homotopieklassen konstant. Dabei bezeichne $\tilde{W_1}(\mathbb{C}^\times) \subset W_1(\mathbb{C}^\times)$ die Teilmenge der stückweise glatten Wege.[1]

b) Die so induzierte Abbildung $\chi : \pi_1(\mathbb{C}^\times, 1) \to \mathbb{Z}$ ist ein Gruppenhomomorphismus

c) und sogar ein Gruppenisomorphismus.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei G ein Gebiet und $f \in H(G)$. Es gelte für jeden geschlossenen, stückweise glatten Weg γ, der ganz in G verläuft,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Zeige: Dann besitzt f eine Stammfunktion auf G.
Abgabe: Bis Dienstag, 23. 10. 2012, 9:30 in den gelben Einwurfkasten im 1. Stock des Zähringerhauses (Geb. 1.85) oder vor Beginn der Übung direkt dort.

[1] Wir verlassen uns ohne Beweis darauf, dass in jeder Homotopieklasse von stetigen Wegen ein stückweise glatter liegt, und dass sich eine Homotopie zwischen stückweise glatten Wegen immer so realisieren lässt, dass sie nur stückweise glatte Wege durchläuft.