Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Ute Luhm
Dr. Florian Nisbach

30. 10. 2012

Funktionentheorie II – Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge.

a) Zeige, dass eine *Ausschöpfungsfolge* für U existiert, also eine Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus kompakten Teilmengen von U, sodass gilt:

   i) $\forall n \in \mathbb{N} : \; K_n \subseteq K_{n+1}^\circ$

   ii) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = U$

b) Zeige, dass es dann für jedes Kompaktum $K \subseteq U$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $K \subseteq K_N$ gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei (V, d) ein mit einer Metrik versehener $\mathbb{R}$-Vektorraum. Wie in der Vorlesung heißt eine Teilmenge $M \subseteq V$ *beschränkt*, wenn gilt: $\forall r > 0 \, \exists \lambda > 0 : \; \lambda \cdot M \subseteq K(0, r)$. Zeige:

a) In $\mathbb{R}^n$ sind bezüglich der Standardmetrik alle Kugeln beschränkt. Bezüglich der diskreten Metrik

$$d(u, v) := \begin{cases} 0 & u = v \\ 1 & u \neq v \end{cases}$$

gibt es unbeschränkte Kugeln.

b) Sei $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $r > 0$. Zeige, dass dann $K(0, r) \subseteq \mathcal{H}(U)$ nicht beschränkt ist.
Hinweis: Finde ein Kompaktum K und ein $\epsilon > 0$ mit $U_{K,\epsilon}(0) \subseteq K(0, r)$. Wähle ein $z_0 \in U \setminus K$ mit $|z_0| < m := \max\{|z| \mid z \in K\}$. Definiere

$$g(z) := \frac{2z}{|z_0| + m}$$

und zeige, dass die Folge $(g^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge besitzt, die ganz in $U_{K,\epsilon}(0)$ liegt, aber nicht beschränkt ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ verstehen. Dazu müssen wir zunächst ein paar neue Begriffe einführen. Ist $f \in \mathcal{M}(D)$ eine meromorphe Funktion auf einem Gebiet D, dann fassen wir f als Abbildung $f \colon D \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ auf, indem wir f in hebbaren Singularitäten fortsetzen und in Polstellen $f(z) = \infty$ definieren. Wir bezeichnen f dann auch als *holomorphe Abbildung* von D nach $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.
Sei nun $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, und sei ferner $g(z) := f(\frac{1}{z})$ meromorph in einer Umgebung von 0. Wir setzen in dem Fall f zu $\hat{f} \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ fort durch $\hat{f}(\infty) := g(0)$. Wir setzen

$$\mathcal{M}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) := \{\hat{f} \mid f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})\} \cup \{c_\infty\},$$

wobei c_∞ die konstante Funktion ∞ bezeichne.

a) Zeige, dass sich Funktionen $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ mit unendlich vielen Polstellen sowie die Exponentialfunktion nicht zu einer meromorphen Funktion auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ fortsetzen lassen.

b) Sei $c_\infty \neq f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$. Zeige, dass es dann ein Polynom $0 \neq Q \in \mathbb{C}[z]$ gibt, sodass $Q \cdot f \in \mathbb{C}[z]$ gilt. Insbesondere gilt also

$$\mathcal{M}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) = \mathbb{C}(z) \cup \{c_\infty\} := \left\{ \frac{P}{Q} \mid P,\, 0 \neq Q \in \mathbb{C}[z] \right\} \cup \{c_\infty\}.$$

c) Zeige, dass gilt

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) := \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) \mid f \text{ bijektiv}\} = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \mid ad - bc \neq 0 \right\}.$$

d) Zeige, dass durch

$$\varphi\colon \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right)$$

ein Gruppenhomomorphismus gegeben ist, dessen Kern isomorph zu $\mathbb{C}$ ist.

Zusatzaufgabe

Bestimme $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) := \{f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ biholomorph}\}$ und zeige, dass $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ sich in natürlicher Weise als Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ auffassen lässt.

Abgabe: Bis Dienstag, 6. 11. 2012, 9:30 in den gelben Einwurfkasten im 1. Stock des Zähringerhauses (Geb. 1.85) oder vor Beginn der Übung direkt dort.