Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Ute Luhm
Dr. Florian Nisbach

6. 11. 2012

# Funktionentheorie II – Übungsblatt 4

**Aufgabe 1 (4 Punkte)**
In der Vorlesung wurde der Begriff »konform« als Synonym für »biholomorph« eingeführt. Wir möchten in dieser Aufgabe verstehen, dass dies zu der in der Analysis üblichen Definition von Konformität passt.
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Wir nennen eine glatte Abbildung $\phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ *konform*, wenn sie ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus auf ihr Bild ist und in jedem $a \in U$ winkeltreu, d. h.

$$\forall a \in U,\ \gamma, \delta\colon I \to U \text{ glatt mit } \gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \delta\left(\frac{1}{2}\right) = a: \ \measuredangle_{\frac{1}{2}}(\gamma, \delta) = \measuredangle_{\frac{1}{2}}(\phi \circ \gamma, \phi \circ \delta).$$

Dabei sei für zwei Wege $\gamma, \delta$ mit $\gamma(t) = \delta(t)$ der Winkel $\measuredangle_t(\gamma, \delta) \in [0, \pi)$ definiert durch

$$\cos \measuredangle_t(\gamma, \delta) = \frac{\langle \gamma'(t), \delta'(t) \rangle}{|\gamma'(t)| \cdot |\delta'(t)|}.$$

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade. Zeige, dass $\phi\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ genau dann konform ist, wenn $\phi$ injektiv ist und für jedes $a \in U$ gilt:

$$\mathrm{Jac}_\phi(a) := \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i, j = 1 \dots n} \in \mathbb{R}^\times \cdot \mathrm{SO}(n).$$

b) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{H}(U)$. Zeige, dass dann äquivalent sind:
   i) $f$ ist konform (im obigen Sinne),
   ii) $f$ ist injektiv und $0 \notin f'(U)$,
   iii) $f: U \to f(U)$ ist biholomorph.

**Aufgabe 2 (4 Punkte)**
a) Bestimme alle konformen Äquivalenzen von $\mathbb{D}$ nach $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$.
b) Zeige, dass gilt:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \right\}.$$

c) Sei $z \in \mathbb{H}$. Bestimme $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}(\mathbb{H})}(z) := \{A \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \mid A(z) = z\}$.

**Aufgabe 3 (4 Punkte)**
Sei $f: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph und besitze zwei verschiedene Fixpunkte. Zeige, dass dann gilt: $f = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$.

**Aufgabe 4 (4 Punkte)**
Sei $K := \mathbb{D} \setminus \overline{K(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})}$. Finde ein $r < 1$, sodass es eine konforme Äquivalenz $f\colon K \to K(0,1) \setminus \overline{K(0, r)}$ gibt, und gib ein solches $f$ an.

**Abgabe:** Bis Dienstag, 13. 11. 2012, 9:30 in den gelben Einwurfkasten im 1. Stock des Zähringerhauses (Geb. 1.85) oder vor Beginn der Übung direkt dort.