Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Ute Luhm
Dr. Florian Nisbach

13. 11. 2012

# Funktionentheorie II – Übungsblatt 5

**Aufgabe 1 (4 Punkte)**
In dieser Aufgabe möchten wir die *Cauchysche Integralformel für Kompakta* (Folgerung 4.5 b) aus der Vorlesung) direkt, d. h. ohne Benutzung der Homologie-Version der Cauchyschen Integralformel, beweisen.

a) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{H}(U)$ und $Q_d := \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}(z)| \leq \frac{d}{2}, |\mathrm{Re}(z)| \leq \frac{d}{2}\} \subseteq U$. Zeige:
$$\forall z \in Q_d : \; f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_d} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta .$$

b) Sei nun $K \subseteq U$ kompakt und $\Gamma$ ein Zyklus in $U \setminus K$ wie in Bemerkung 4.4 aus der Vorlesung. Folgere aus a), dass dann gilt:
$$\forall z \in K : \; f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta .$$

**Aufgabe 2 (4 Punkte)**
Sei $K = \partial\,\mathbb{D}$. Wir möchten einsehen, dass sich die rationale Funktion $g \colon z \mapsto \frac{1}{z}$ nicht durch rationale Funktionen, deren einziger Pol in 2 liegt, auf $K$ gleichmäßig approximieren lässt. Zeige dazu, dass es keine rationale Funktion $f$ gibt, die in 2 ihren einzigen Pol hat und für die für jedes $z \in \partial\,\mathbb{D}$ gilt: $|g(z) - f(z)| < 1$.

**Aufgabe 3 (4 Punkte)**
Sei $K = \overline{K(0,2)} \setminus K(0, \frac{4}{5})$. Finde eine Folge von Polynomen $P_n \in \mathbb{C}[z]$, sodass $(P_n(\frac{1}{z}))_{n \in \mathbb{N}}$ auf $K$ gleichmäßig gegen $\frac{1}{z - \frac{1}{2}}$ konvergiert.

**Aufgabe 4 (4 Punkte)**
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen.

a) Zeige, dass $U$ genau dann wegzusammenhängend ist, wenn $U$ zusammenhängend ist.

b) Finde eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{C}$, die zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

c) Zeige, dass $U$ nur abzählbar viele Zusammenhangskomponenten besitzt.

d) Finde ein Kompaktum $K \subseteq \mathbb{C}$, sodass $\mathbb{C} \setminus K$ unendlich viele Zusammenhangskomponenten besitzt.

*Erinnerung:* Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{C}$ heißt zusammenhängend, wenn sie sich nicht als disjunkte Vereinigung $M = M_1 \dot{\cup} M_2$ schreiben lässt mit in $M$ relativ offenen Teilmengen $M_1 \neq \emptyset \neq M_2$.

**Abgabe**: Bis Dienstag, 20. 11. 2012, 9:30 in den gelben Einwurfkasten im 1. Stock des Zähringerhauses (Geb. 1.85) oder vor Beginn der Übung direkt dort.