Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Ute Luhm
Dr. Florian Nisbach

20. 11. 2012

Funktionentheorie II – Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Sei $K \subsetneq \partial\mathbb{D}$ kompakt. Zeige, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Funktion $f \in \mathcal{H}(K(0,2))$ gibt mit $f(0) = 1$, und $\|f\|_K \leq \varepsilon$.

b) Zeige, dass es für $K = \partial\mathbb{D}$ und $\varepsilon < 1$ kein solches f gibt.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

a) Zeige, dass die Reihe $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ auf $D := \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 1\}$ lokal gleichmäßig konvergiert.

b) Zeige, dass es eine Folge von Polynomen mit reellen Koeffizienten gibt, die auf D lokal gleichmäßig gegen ζ konvergiert.

c) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ Folgen komplexer Zahlen und $s \in \mathbb{C}$, sodass $R = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n^{-s}$ und $S = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, n^{-s}$ absolut konvergieren. Zeige, dass dann gilt:

$$R \cdot S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d \text{ teilt } n} a_d b_{\frac{n}{d}} \right) n^{-s}.$$

d) Sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen, $p \in \mathbb{P}$ sowie $\mathbb{N}_{(P)} := \{n \in \mathbb{N}_{>0} \mid p \in \mathbb{P} \text{ teilt } n \Rightarrow p \leq P\}$. Zeige induktiv:

$$\prod_{p\in\mathbb{P},\, p\leq P} \left(\sum_{l=0}^{\infty} p^{-ls} \right) = \sum_{n\in\mathbb{N}_{(P)}} n^{-s}.$$

e) Beweise damit die *Eulersche Produktformel:* Für jedes $s \in D$ gilt:

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-p^{-s}} := \lim_{P\to\infty} \prod_{p\in\mathbb{P},\, p\leq P} \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

f) Folgere aus e), dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Für $\mathbb{R}$-linear unabhängige $z, w \in \mathbb{C}$ schreiben wir $\Lambda_{z,w} := \mathbb{Z}\cdot z + \mathbb{Z}\cdot w$. Zwei Gitter Λ, Λ' nennen wir äquivalent, wenn es eine komplexe Zahl $c \in \mathbb{C}^\times$ gibt mit $c \cdot \Lambda = \Lambda'$. Wir schreiben dann $\Lambda \sim \Lambda'$.

a) Skizziere die Menge $M := \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(z)| \leq \frac{1}{2},\ |z| \geq 1\}$.

b) Zeige, dass es zu jedem Gitter Λ ein $m \in M$ gibt mit $\Lambda \sim \Lambda_{1,m}$.

c) Sei $m \in \{ti - \frac{1}{2} \mid t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\}$. Zeige, dass dann gilt: $\Lambda_{1,m} = \Lambda_{1,1+m}$.

d) Sei $m \in \{z \in M \mid |z| = 1\}$. Zeige, dass dann gilt: $\Lambda_{1,m} \sim \Lambda_{1,-\overline{m}}$.

e) Zeige, dass für $m, m' \in M^\circ$ mit $m \neq m'$ gilt: $\Lambda_{1,m} \nsim \Lambda_{1,m'}$.

Abgabe: Bis Dienstag, 27. 11. 2012, 9:30 in den gelben Einwurfkasten im 1. Stock des Zähringerhauses (Geb. 1.85) oder vor Beginn der Übung direkt dort.