Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Ute Luhm
Dr. Florian Nisbach

27. 11. 2012

Funktionentheorie II – Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Sei $r \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeige, dass dann für $R_n := \{\underline{r}, \underline{2r}, \ldots, \underline{nr}\}$ gilt: $\min R_n < \frac{1}{n}$. Dabei bezeichne $\underline{x}$ den Nachkomma-Anteil von $x \in \mathbb{R}$, also $\underline{x} := x - [x]$.

b) Sei $t \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $\Gamma := \mathbb{Z} + t\,\mathbb{Z}$ genau dann eine diskrete Untergruppe von $\mathbb{R}$ ist, wenn t eine rationale Zahl ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{M}(D) \setminus \{0\}$. Dabei bezeichne $\mathcal{M}(D)$ den Körper der meromorphen Funktionen auf D. Zeige, dass dann für jedes $a \in D$ gilt:
$$\operatorname{res}_a \left(\frac{f'}{f}\right) = \operatorname{ord}_a(f).$$[1]

b) Beweise den dritten Satz von Liouville: Sei $\Lambda = \lambda\,\mathbb{Z} + \mu\,\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter, $f \in \mathcal{K}(\Lambda) \setminus \mathbb{C}$ und $P := \{a\,\lambda + b\,\mu \mid a, b \in [0,1)\}$. Zeige, dass es dann eine natürliche Zahl $n \geq 2$ gibt, sodass f auf P jeden Wert $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ (mit Vielfachheiten gerechnet) genau n-mal annimmt, also dass f auf P mit Vielfachheiten genau n Polstellen hat[2] und dass gilt:
$$\forall w \in \mathbb{C} : \sum_{z \in P,\, f(z) = w} \operatorname{ord}_z(f - w) = n.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter und $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ eine ganze Funktion, sodass es für jedes $\omega \in \Lambda$ eine Konstante C_ω gibt mit
$$\forall z \in \mathbb{C} : \; f(z + \omega) = C_\omega \cdot f(z).$$
Zeige, dass es dann $a, b \in \mathbb{C}$ gibt mit $f(z) = a \cdot \exp(bz)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Wie in der Vorlesung sei für ein Gitter $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ und $k \geq 3$ die k-te Eisensteinreihe als
$$S_k(\Lambda) := \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^k}$$
definiert. Zeige:

a) Für jedes Gitter Λ und jedes $k \in 2\,\mathbb{N}_{>0} + 1$ gilt: $S_k(\Lambda) = 0$.

b) Für $M = \mathbb{Z} + i\,\mathbb{Z}$ und $k \notin 4\,\mathbb{N}$ gilt $S_k(M) = 0$, insbesondere also $S_6(M) = 0$.

c) Für $N = \mathbb{Z} + (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i)\,\mathbb{Z}$ und $k \notin 6\,\mathbb{N}$ gilt $S_k(N) = 0$, insbesondere also $S_4(N) = 0$.

Abgabe: Bis Dienstag, 4. 12. 2012, 9:30 in den gelben Einwurfkasten im 1. Stock des Zähringerhauses (Geb. 1.85) oder vor Beginn der Übung direkt dort.

[1] Ist $f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z-a)^n$ mit $a_k \neq 0$, dann definieren wir $\operatorname{ord}_a(f) := k$. Insbesondere ist die Ordnung von Polstellen negativ!

[2] Was heißt das genau?