Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Ute Luhm
Dr. Florian Nisbach

4. 12. 2012

Funktionentheorie II – Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter und $\wp := \wp_\Lambda$ die dazugehörige Weierstraßsche $\wp$-Funktion. Stelle die folgenden Λ-elliptischen Funktionen in der Form $R(\wp) + \wp' \cdot S(\wp)$ mit $R, S \in \mathbb{C}(z)$ dar:

a) $\wp''''$
b) $\frac{1}{\wp'}$
c) $\sum_{\omega\in\Lambda} \frac{1}{(z-\omega)^4}$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter, $s_2 := 60S_4(\Lambda)$, $s_3 := 140S_6(\Lambda)$, $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und f eine nichtkonstante meromorphe Funktion auf D. Für f gelte auf D die Differentialgleichung

$$(f')^2 = 4f^3 - s_2 f - s_3.$$

Zeige, dass f sich dann eindeutig zu einer Λ-elliptischen Funktion auf $\mathbb{C}$ fortsetzen lässt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Finde alle $f,\ g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ mit $f^2 + g^2 = 1$.
b) Sei $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\, e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Finde Konstanten $c, d \in \mathbb{C}$, sodass für

$$f := \frac{cd + 2\wp'}{2d\wp} \text{ und } g := \frac{cd - 2\wp'}{2d\wp}$$

gilt: $f^3 + g^3 = 1$.
Hinweis: Das ist kein Auftrag, $S_6(\Lambda)$ zu berechnen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $\Lambda = \mathbb{Z}\,\omega_1 + \mathbb{Z}\,\omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter und $\wp := \wp_\Lambda$, $P := \{a\omega_1 + b\omega_2 \mid a, b \in [0, 1)\}$. Weiter seien $e_1 := \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right)$, $e_2 := \wp\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)$ und $e_3 := \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$ die Funktionswerte von $\wp$ an den Halbgitterpunkten.

a) Zeige, dass $e_1,\ e_2,\ e_3$ und ∞ in P jeweils genau ein Urbild unter $\wp$ haben und dass jeder andere Wert genau zweimal mit Vielfachheit 1 angenommen wird.
b) Sei $z \in P$ mit $\wp(z) = a \in \mathbb{C} \setminus \{e_1,\ e_2,\ e_3\}$. Finde das eindeutig bestimmte $z' \in P \setminus \{z\}$ mit $\wp(z') = a$.
c) Zeige: $e_1 + e_2 + e_3 = 0$.
d) Zeige, dass $e_1,\ e_2$ und e_3 die Nullstellen des Polynoms $4Z^3 - 60S_4(\Lambda)Z - 140S_6(\Lambda)$ sind.

Abgabe: Bis Dienstag, 11. 12. 2012, 9:30 in den gelben Einwurfkasten im 1. Stock des Zähringerhauses (Geb. 1.85) oder vor Beginn der Übung direkt dort.