Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Ute Luhm
Dr. Florian Nisbach

11. 12. 2012

Funktionentheorie II – Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Seien $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter und $n \geq 2$.

a) Finde eine Funktion $f \in \mathcal{K}(\Lambda)$, die (modulo Λ) genau n einfache Pole hat.
b) Zeige, dass es kein $f \in \mathcal{K}(\Lambda)$ gibt, sodass sich jedes $g \in \mathcal{K}(\Lambda)$ als rationale Funktion in f schreiben lässt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter, $s_2(\Lambda) = 60\, S_4(\Lambda)$ und $s_3(\Lambda) = 140\, S_6(\Lambda)$.

a) Zeige, dass für jedes $k \geq 3$ und $a \in \mathbb{C}^\times$ gilt: $S_k(a\Lambda) = a^{-k} S_k(\Lambda)$.
b) Zeige, dass gilt: $\Delta(\Lambda) := s_2^3(\Lambda) - 27 s_3^2(\Lambda) \neq 0$. Benutze dazu Aufgabe 4 d) vom letzten Übungsblatt und den folgenden
Hinweis: Für $a, b \in \mathbb{C}$ hat das Polynom $X^3 + 3aX + 2b$ genau dann eine doppelte Nullstelle, wenn $a^3 + b^2 = 0$ gilt.
c) Die *j-Invariante* von Λ sei definiert als $j(\Lambda) := \frac{s_2^3(\Lambda)}{\Delta(\Lambda)}$. Zeige, dass für jedes $a \in \mathbb{C}^\times$ gilt: $j(a\Lambda) = j(\Lambda)$.
d) Berechne $j(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\, i)$ und $j(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\, e^{\frac{2\pi i}{3}})$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Sei nun $\tau \in \mathbb{H}$. Für $k \geq 3$ definieren wir $S_k(\tau) := S_k(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\,\tau)$ und analog $\Delta(\tau)$ und $j(\tau)$.

a) Zeige, dass (für $k \geq 3$) $S_k\colon\ \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ und damit auch $j\colon\ \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen sind. Zeige dazu zunächst: Seien $C, \delta > 0$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle $\tau \in \mathbb{H}$ mit $|\mathrm{Re}(\tau)| \leq C$ und $\mathrm{Im}(\tau) \geq \delta$ sowie für alle $c, d \in \mathbb{R}$ gilt:
$$|c\tau + d| \geq \varepsilon |ci + d|.$$
b) Sei $M := \{\tau \in \mathbb{H} \mid |\mathrm{Re}(\tau)| \leq \frac{1}{2}, |\tau| \geq 1\}$ und $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ eine Folge mit $\mathrm{Im}(\tau_n) \to \infty$. Zeige, dass dann für jedes gerade $k \geq 4$ gilt: $\lim_{n\to\infty} S_k(\tau_n) = 2\zeta(k)$. Folgere daraus $j(\tau_n) \to \infty$. Benutze für letztere Aussage, dass gilt: $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ sowie $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$.
c) Zeige, dass $j(M) \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen ist und folgere daraus, dass $j\colon\ \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ surjektiv ist.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

a) Berechne $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{k+(-1)^{k+1}}{k}$ und $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{k^3-1}{k^3+1}$.
b) Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}>0} \subseteq \mathbb{C}$ eine Folge. Zeige, dass aus der Konvergenz von $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ die Konvergenz von $\prod_{n=1}^{\infty} |z_n|$ folgt. Gilt die Umkehrung?

Abgabe: Bis Dienstag, 18. 12. 2012, 9:30 in den gelben Einwurfkasten im 1. Stock des Zähringerhauses (Geb. 1.85) oder vor Beginn der Übung direkt dort.