Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Ute Luhm
Dr. Florian Nisbach

18. 12. 2012

Funktionentheorie II – Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Zeige, dass das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ genau dann absolut konvergiert, wenn $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ konvergiert.

b) Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $0 < b_n \leq 1$, sodass $\sum_{n=1}^{\infty}(1-b_n)$ divergiert. Zeige, dass dann das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ divergiert und gilt: $\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N} b_n = 0$.

c) Sei $z \in \mathbb{C}$. Zeige, dass das Produkt $\prod_{n=0}^{\infty}(1+z^{2^n})$ genau dann absolut konvergiert, wenn $|z| < 1$ gilt, und dass in diesem Fall gilt:

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+z^{2^n}) = \frac{1}{1-z}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Beweise die Eulersche Produktformel für den Kosinus:

$$\forall z \in \mathbb{C}\colon\ \cos(\pi z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2}\right).$$

Benutze dazu die Produktformel für den Sinus und die aus der Schule bekannte (oder ansonsten selbst leicht herzuleitende) Formel $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Beweise die folgende Formel von Vieta:

$$\prod_{n=2}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

Mache dabei wieder von $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$ Gebrauch.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

In der Stochastik ist die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung gegeben durch

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Damit Φ eine Verteilungsfunktion ist, muss also insbesondere $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{2\pi}$ gelten, was wir hier beweisen wollen. Zeige dazu $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ und benutze die Eulersche Ergänzungsformel $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$.

Abgabe: Bis Dienstag, 8. 1. 2013, 9:30 in den gelben Einwurfkasten im 1. Stock des Zähringerhauses (Geb. 1.85) oder vor Beginn der Übung direkt dort.