

Funktionentheorie II – Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Es sei $V := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \in [1, 2)\}$, $D \supset V$ ein Gebiet und f eine auf D meromorphe Funktion, die folgende Eigenschaften erfülle:

1. $f(1) = 1$.
2. Für $z, z + 1 \in D$ gilt: $f(z + 1) = z \cdot f(z)$.
3. f ist auf V beschränkt.

Wir wollen sehen, dass f dann auf D schon mit Γ übereinstimmt. Zeige dazu:

a) Die Funktion

$$g(z) := \begin{cases} (z-1)(z-2)\cdots(z-n+1) \cdot f(z-n+1) & (\operatorname{Re}(z) \in [n, n+1), n \in \mathbb{N}_{>0}) \\ \frac{1}{z(z+1)\cdots(z+n)} \cdot f(z+n+1) & (\operatorname{Re}(z) \in [-n, -n+1), n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

setzt f auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ holomorph fort.

b) Sei $\varphi = \Gamma$ oder $\varphi = g$. Dann hat φ in $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ einfache Pole und für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\operatorname{res}_{-n}(\varphi) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

c) $h := g - \Gamma$ lässt sich auf \mathbb{C} holomorph fortsetzen und ist auf $\tilde{V} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \in [0, 2)\}$ beschränkt.

d) Für $H(z) := h(z) \cdot h(1-z)$ gilt: $H(z+2) = H(z)$ und $H(1) = 0$.

e) $\Gamma|_D = f$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeige die LEGENDRESche Identität für die Gamma-Funktion: $\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{z-1}}\Gamma(z)$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Wir wollen beweisen, dass auf $R := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ die aus der Vorlesung bekannte Integraldarstellung $G(z) := \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t} dt$ tatsächlich mit $\Gamma(z)$ übereinstimmt. Zeige dazu:

- a) Die uneigentlichen Integrale $\int_0^1 |t^{z-1}e^{-t}| dt$ und $\int_1^\infty |t^{z-1}e^{-t}| dt$ existieren für $z \in R$ und damit existiert auch $G(z)$.
- b) Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert $G_n(z) := \int_{\frac{1}{n}}^n t^{z-1}e^{-t} dt$ lokal gleichmäßig gegen G , somit ist G auf R holomorph.
- c) G erfüllt die Voraussetzungen von Aufgabe 1 und stimmt deshalb auf R mit Γ überein.

Abgabe: Bis Dienstag, 15. 1. 2013, 9:30 in den gelben Einwurfskasten im 1. Stock des Zähringerhauses (Geb. 1.85) oder vor Beginn der Übung direkt dort.