Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Ute Luhm
Dr. Florian Nisbach

15. 1. 2013

Funktionentheorie II – Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ eine meromorphe Funktion, die nur einfache Pole mit ganzzahligen Residuen besitzt. Zeige, dass es dann ein $h \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ gibt mit $f = \frac{h'}{h}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Finde eine ganze Funktion, deren Nullstellenmenge $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es sei $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter. Wir haben im Kapitel über elliptische Funktionen schon einmal gesehen, dass $\sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^3}$ absolut konvergiert.

a) Folgere daraus, dass das Weierstraß-Produkt

$$\sigma(z) := z \cdot \prod_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \cdot \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}\right) \right)$$

gegen eine ganze Funktion konvergiert.

b) Erkenne die Funktion $\zeta := \frac{\sigma'}{\sigma}$ wieder und zeige, dass sie Λ-elliptisch ist.[1]

c) Auch σ^{-1} hat genau in Λ Polstellen. Ist σ^{-1} ebenfalls eine elliptische Funktion?

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es sei $g(z) := z^3 \sin(z)$, ferner seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ gegeben. Finde eine rationale Funktion $h \in \mathbb{C}(z)$, sodass $f := g \cdot h$ eine holomorphe Fortsetzung $\tilde{f} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ besitzt und für diese gilt:

$$\tilde{f}(0) = a,\ \tilde{f}'(0) = b,\ \tilde{f}''(0) = c,\ \tilde{f}'''(0) = d.$$

Abgabe: Bis Dienstag, 22. 1. 2013, 9:30 in den gelben Einwurfkasten im 1. Stock des Zähringerhauses (Geb. 1.85) oder vor Beginn der Übung direkt dort.

[1] Dieses ζ heißt Weierstraßsche Zeta-Funktion, nicht zu verwechseln mit der Riemannschen Zeta-Funktion.