Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Ute Luhm
Dr. Florian Nisbach

22. 1. 2013

Funktionentheorie II – Übungsblatt 13

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Sei X eine topologische Fläche und $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ zwei komplexe Atlanten auf X. Zeige, dass $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ genau dann biholomorph verträglich sind, wenn $\mathrm{id}_X\colon (X, \mathfrak{A}_1) \to (X, \mathfrak{A}_2)$ eine holomorphe Abbildung ist.

b) Auf $\mathbb{C}$ seien die komplexen Atlanten

$$\mathfrak{A}_1 := \{\mathrm{id}_{\mathbb{C}}\},\ \ \mathfrak{A}_2 := \{z \mapsto \operatorname{Im} z + i \cdot \operatorname{Re} z\},\ \ \mathfrak{A}_3 := \{z \mapsto \operatorname{Im} z - i \cdot \operatorname{Re} z\}$$

gegeben. Welche dieser Atlanten sind biholomorph verträglich?

c) Gib eine biholomorphe Abbildung $\varphi\colon (\mathbb{C}, \mathfrak{A}_1) \to (\mathbb{C}, \mathfrak{A}_2)$ an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Für eine Riemannsche Fläche X und eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ bezeichne $\mathcal{O}_X(U) := \{\varphi\colon U \to \mathbb{C} \text{ holomorph}\}$ die Menge der auf U holomorphen Funktionen. Sei $f: X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen Riemannschen Flächen.

a) Zeige, dass f genau dann holomorph ist, wenn für jede offene Teilmenge $U \subseteq Y$ und jedes $\varphi \in \mathcal{O}_Y(U)$ gilt: $f^*(\varphi) := \varphi \circ f \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$.

b) Reicht es für die Holomorphie zu fordern, dass $f^*(\mathcal{O}_Y(Y)) \subseteq \mathcal{O}_X(X)$ gilt?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei X eine Riemannsche Fläche. Eine Abbildung $d\colon X \to \mathbb{Z}$ heißt *Divisor*, wenn es eine abgeschlossene diskrete Teilmenge $T_d \subseteq X$ gibt mit $d(z) \neq 0 \Leftrightarrow z \in T_d$. Durch $(d + d')(z) := d(z) + d'(z)$ wird $\mathfrak{Div}(X) := \{d\colon X \to \mathbb{Z} \text{ Divisor}\}$ zu einer abelschen Gruppe.

a) Zeige, dass durch $\operatorname{div}(f)(z) := \operatorname{ord}_z(f)$ ein Gruppenhomomorphismus $\operatorname{div}\colon \mathcal{M}(X)^\times \to \mathfrak{Div}(X)$ gegeben ist.[1] Sein Bild wird als $\mathfrak{Prin}(X)$, die Gruppe der *Hauptdivisoren*, bezeichnet. Der Quotient $\mathfrak{Cl}(X) := \mathfrak{Div}(X)/\mathfrak{Prin}(X)$ heißt *Divisorenklassengruppe*.

b) Sei nun $X = \mathbb{C}$. Zeige, dass dann div surjektiv ist und somit gilt $\mathfrak{Cl}(\mathbb{C}) = 0$.

c) Zeige: $\mathfrak{Cl}(\hat{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{Z}$. Erinnere Dich dabei an die dritte Aufgabe auf Übungsblatt 3.

d) Sei $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter und $E_\Lambda := \mathbb{C}/\Lambda$. Zeige: $\mathfrak{Cl}(E_\Lambda) \neq 0$.

Abgabe: Bis Dienstag, 29. 1. 2013, 9:30 in den gelben Einwurfkasten im 1. Stock des Zähringerhauses (Geb. 1.85) oder vor Beginn der Übung direkt dort.

[1] Dabei bezeichnet $\mathcal{M}(X)^\times$ die Gruppe der meromorphen Funktionen $f \neq 0$ mit der Multiplikation als Verknüpfung. Wie schon auf Übungsblatt 7 haben Nullstellen positive, Polstellen negative Ordnung.