Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Ute Luhm
Dr. Florian Nisbach

29. 1. 2013

Funktionentheorie II – Übungsblatt 14

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei H ein zusammenhängender Hausdorffraum, X eine Riemannsche Fläche und $f: H \to X$ ein lokaler Homöomorphismus (d. h. jedes $h \in H$ besitzt eine offene Umgebung U, sodass $f_{|U}: U \to f(U)$ ein Homöomorphismus ist.) Zeige:

a) H ist eine topologische Fläche.

b) Es gibt genau eine komplexe Struktur auf H, sodass $f: H \to X$ holomorph ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei X eine Riemannsche Fläche und G eine Gruppe von biholomorphen Abbildungen auf X mit der folgenden Eigenschaft: Jedes $x \in X$ besitzt eine offene Umgebung U_x, sodass für jedes $g \in G \setminus \{\mathrm{id}\}$ gilt: $U_x \cap g(U_x) = \emptyset$. Wir sagen, G operiert auf X *eigentlich diskontinuierlich und frei.* Für $x \in X$ heißt $Gx := \{g(x) \mid g \in G\}$ *Bahn* von x. Den *Bahnenraum* oder *Quotienten* dieser Aktion bezeichnen wir mit $X/G := \{Gx \mid x \in X\}$. Außerdem sei $p: X \to X/G$, $x \mapsto Gx$ die kanonische Projektion.

a) Auf X/G definieren wir wie folgt eine Topologie: $U \subseteq X/G$ offen $:\Leftrightarrow p^{-1}(U) \subseteq X$ offen. Zeige, dass diese Topologie hausdorffsch ist.

b) Finde einen komplexen Atlas auf X/G, sodass p holomorph ist.

c) Zeige, dass diese Bedingung die komplexe Struktur auf X/G eindeutig bestimmt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Sei $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, $|\lambda| \neq 1$. Zeige, dass $G_\lambda := \{z \mapsto \lambda^k z \mid k \in \mathbb{Z}\}$ eigentlich diskontinuierlich und frei auf $\mathbb{C}^\times$ operiert. Skizziere $\mathbb{C}^\times / G_\lambda$.

b) Finde ein geeignetes Gitter $\Lambda \subset \mathbb{C}$, sodass es eine biholomorphe Abbildung $\mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}^\times / G_\lambda$ gibt und gib eine solche an.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Seien X und Y Riemannsche Flächen, wobei X kompakt sei. Aus der Vorlesung wissen wir, dass jede nichtkonstante holomorphe Abbildung $X \to Y$ surjektiv ist, und dass die Existenz einer solchen Abbildung die Kompaktheit von Y impliziert. Folgere daraus

a) den Satz von Liouville und

b) den Fundamentalsatz der Algebra.

Abgabe: Bis Dienstag, 5. 2. 2013, 9:30 in den gelben Einwurfkasten im 1. Stock des Zähringerhauses (Geb. 1.85) oder vor Beginn der Übung direkt dort.