

Funktionentheorie II – Das endgültige Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei X eine RIEMANNSche Fläche und $\{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i \mid i \in J\}$ ihr maximaler Atlas. Für $z \in X$ und eine Differentialform $\omega = (f_i)_{i \in J} \in \Omega(X)$ definieren wir die Ordnung $\text{ord}_z \omega := \text{ord}_z f_i$, wobei $z \in U_i$ gelte.

- Zeige, dass $\text{ord}_z \omega$ wohldefiniert ist, also obige Definition nicht von der Wahl der Karte φ_i abhängt.
- Sei nun $X = \hat{\mathbb{C}}$ und $\omega = d(\text{id}_{\hat{\mathbb{C}}})$. Zeige: $\text{ord}_z \omega = 0$ für $z \in \mathbb{C}$ und $\text{ord}_\infty \omega = -2$. Insbesondere gilt also $\text{deg } \omega := \sum_{z \in \hat{\mathbb{C}}} \text{ord}_z \omega = -2$.
- Sei $0 \neq \tau \in \Omega(\hat{\mathbb{C}})$ beliebig. Zeige: $\text{deg } \tau = -2$. Insbesondere gibt es also auf $\hat{\mathbb{C}}$ keine nichttrivialen holomorphen Differentialformen.

Aufgabe 2

Sei X eine RIEMANNSche Fläche und $f, g \in \mathcal{M}(X)$. Zeige:

- $d(f \cdot g) = f dg + g df$.
- Sei $\gamma : I \rightarrow X$ ein Weg, dann gilt: $\int_\gamma f dg = (f \cdot g)(\gamma(1)) - (f \cdot g)(\gamma(0)) - \int_\gamma g df$.

Aufgabe 3

Sei X eine RIEMANNSche Fläche und $0 \neq \omega \in \Omega(X)$ eine Differentialform. Wir definieren $X^* := \{z \in X \mid \text{ord}_z \omega = 0\}$ sowie für jedes $z \in X^*$ und jede Karte $\varphi : U \rightarrow V$ mit $z \in U \subseteq X^*$ die Funktion

$$\mu_{\varphi,z} : U \rightarrow \mathbb{C}, w \mapsto \int_{\gamma_w} \omega.$$

Dabei sei $\gamma : I \rightarrow U$ ein beliebiger Weg mit $\gamma(0) = z, \gamma(1) = w$.

- Zeige, dass $\mu_{\varphi,z}$ von der Wahl von γ unabhängig und außerdem in einer Umgebung $z \in \tilde{U}_{\varphi,z} \subseteq U$ injektiv ist.
- Zeige, dass die $\mu_{\varphi,z} : \tilde{U}_{\varphi,z} \rightarrow \mu_{\varphi,z}(\tilde{U}_{\varphi,z})$ einen komplexen Atlas auf X^* bilden, dessen Kartenwechselabbildungen Translationen, also von der Form $z \mapsto z + c$ sind. Ein solcher Atlas heißt *Translationsatlas*.

Abgabe: Bei Bedarf direkt beim Übungsleiter Deines Vertrauens.