Funktionentheorie II – Lösungen zum 15. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Seien $z \in X$, $\varphi_i\colon U_i \to V_i$, $\varphi_j\colon U_j \to V_j$ Karten mit $z \in U_i \cap U_j$.
z. z.: $\operatorname{ord}_z f_i = \operatorname{ord}_z f_j$.
Es gilt für $w \in U_i \cap U_j:\ f_j(w) = f_i(w) \cdot (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})'(\varphi_j(w))$. Die Funktion

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}\colon \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

ist biholomorph, insbesondere gilt:

$$\forall w \in U_i \cap U_j\colon (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})'(\varphi_j(w)) \neq 0,$$

also insbesondere $\operatorname{ord}_z(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}) \circ \varphi_j = 0$. Daraus folgt die Behauptung.

b) Betrachte die beiden Karten

$$\varphi_1\colon U_1 \coloneqq \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z \text{ und } \varphi_2\colon U_2 \coloneqq \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{z}.$$

Für $\omega = \mathrm{d}(\mathrm{id}_{\hat{\mathbb{C}}}) = (f_i)$ gilt: $f_1 = (\mathrm{id}_{\hat{\mathbb{C}}} \circ \varphi_1^{-1})' \circ \varphi_1 = 1$, also $\forall z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{ord}_z\omega = \operatorname{ord}_z f_1 = 0$.
Weiterhin: $f_2 = (\mathrm{id}_{\hat{\mathbb{C}}} \circ \varphi_2^{-1})' \circ \varphi_2\colon z \mapsto -z^2$. Diese Funktion hat bei ∞ einen doppelten Pol, und somit gilt $\operatorname{ord}_\infty\omega = -2$.

c) Wir wissen: $\dim_{\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})}\Omega(\hat{\mathbb{C}}) = 1$, insbesondere existiert ein eindeutiges $f \in \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})$ mit $\tau = f\omega$. Weiterhin wissen wir: $\sum_{z\in\hat{\mathbb{C}}} \operatorname{ord}_z f = 0$, also folgt:

$$\deg\tau = \sum_{z\in\hat{\mathbb{C}}} \operatorname{ord}_z(f\omega) = \sum_{z\in\hat{\mathbb{C}}} \operatorname{ord}_z f + \operatorname{ord}_z\omega = 0 - 2 = -2.$$

Aufgabe 2

a) Mit der Notation aus der Vorlesung gilt:

$$\begin{aligned}
\big(\mathrm{d}(f \cdot g)\big)_{|U_i} &= ((f \cdot g) \circ \varphi_i^{-1})' \circ \varphi_i \\
&= \Big((f \circ \varphi_i^{-1}) \cdot (g \circ \varphi_i^{-1})'\Big) \circ \varphi_i + \Big((g \circ \varphi_i^{-1}) \cdot (f \circ \varphi_i^{-1})'\Big) \circ \varphi_i \\
&= f \circ ((g \circ \varphi_i^{-1})' \circ \varphi_i) + g \circ ((f \circ \varphi_i^{-1})' \circ \varphi_i) \\
&= (f\,\mathrm{d}g + g\,\mathrm{d}f)_{|U_i}.
\end{aligned}$$

b) Ohne Einschränkung sei $\varphi\colon U \to V$ eine Karte mit $\gamma(I) \subseteq U$.
Nach Teil a) gilt: $\int_\gamma f\,\mathrm{d}g = \int_\gamma \mathrm{d}(f \cdot g) - \int_\gamma g\,\mathrm{d}f$, und es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathrm{d}(f \cdot g) &= \int_{\varphi\circ\gamma} \Big((\mathrm{d}(f \cdot g))_{|U} \circ \varphi^{-1}\Big)(z)\mathrm{d}z \\
&= \int_{\varphi\circ\gamma} ((f \cdot g) \circ \varphi^{-1})'(\varphi(\varphi^{-1}(z))\mathrm{d}z \\
&= \int_{\varphi\circ\gamma} ((f \cdot g) \circ \varphi^{-1})'(z)\mathrm{d}z \\
&= (f \cdot g) \circ \varphi^{-1}\Big|_{\varphi(\gamma(0))}^{\varphi(\gamma(1))} = (f \cdot g)(\gamma(1)) - (f \cdot g)(\gamma(0)).
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Sei $\varphi\colon U \to V$ eine Kartenumgebung und $\omega_{|U} = f$. Nach Definition gilt:

$$\mu_{\varphi,z}(w) = \int_{\gamma_w} \omega = \int_{\varphi\circ\gamma_w} (f \circ \varphi^{-1})(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

$\mu_{\varphi,z}$ ist möglicherweise nicht wohldefiniert, und zwar, wenn U nicht einfach zusammenhängend ist. X^* ist aber lokal einfach zusammenhängend, da $X \setminus X^*$ diskret ist. Also stimmt die Behauptung lokal, denn in einer einfach zusammenhängenden Umgebung um z hängt das Integral nur von Anfangs- und Endpunkt des Integrationsweges ab (weil $f \circ \varphi^{-1}$ holomorph ist).
Außerdem gilt nach Konstruktion $\mathrm{ord}_z f = 0$, also auch $\mathrm{ord}_{\varphi(z)} f \circ \varphi^{-1} = 0$ und damit $(\mu_{\varphi,z})'(z) = f(z) \neq 0$. Also ist $\mu_{\varphi,z}$ lokal biholomorph.

b) Sind $\mu_{\varphi,z}\colon \tilde{U}_{\varphi,z} \to \mu_{\varphi,z}(\tilde{U}_{\varphi,z})$ und $\mu_{\psi,z}\colon \tilde{U}_{\psi,z} \to \mu_{\psi,z}(\tilde{U}_{\varphi,z})$ wie in a) konstruierte biholomorphe Abbildungen. Dann gilt für alle $w \in \tilde{U}_{\varphi,z} \cap \tilde{U}_{\psi,z}\colon \mu_{\varphi,z}(w) = \mu_{\psi,z}(w)$, denn das Integral ist unabhängig von der gewählten Karte.
Geht man zu einem neuen Basispunkt $z' \in \tilde{U}_{\varphi,z}$ über, so gilt für jedes $w \in \tilde{U}_{\varphi,z}\colon \mu_{\varphi,z}(w) = \mu_{\varphi,z'}(w) + \mu_{\varphi,z}(z')$. Insbesondere gilt also mit $c := \mu_{\varphi,z}(z') : \mu_{\varphi,z} = \mu_{\varphi,z'} + c$.