Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

20. Oktober 2014

JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen

Dipl.-Math. oec. Anja Randecker

Geometrische Gruppentheorie II – Übungsblatt 1

Stichworte: hyperbolische Räume, Hausdorff-Abstand

Aufgabe 1 *Hausdorff-Abstand* (3 Punkte)
Sei (X, d) ein metrischer Raum. In der Vorlesung wurde der Hausdorff-Abstand d_H für nichtleere Teilmengen von X definiert.

a) Zeige, dass d_H eine Metrik auf der Menge der nichtleeren kompakten Teilmengen von X ist.

b) Sei $r \in \mathbb{R}$. Finde einen metrischen Raum (X, d) und zwei nichtleere kompakte Teilmengen A, B von X, so dass gilt:

$$\sup \{d(a, B) : a \in A\} = 0 \quad \text{und} \quad \sup \{d(b, A) : b \in B\} \geq r.$$

Aufgabe 2 *Gromov-Produkt* (5 Punkte)
Sei (X, d) ein metrischer Raum und $w \in X$ ein Basispunkt. Das Gromov-Produkt von zwei Punkten $x, y \in X$ bzgl. w ist definiert als

$$(x.y)_w := \frac{1}{2} \left(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y) \right).$$

a) Zeige, dass ein geodätischer, metrischer Raum (X, d) genau dann Gromov-hyperbolisch ist, wenn für ein $\delta > 0$ und für alle Basispunkte $w \in X$ und Punkte $x, y, z \in X$ gilt:
$$(x.y)_w \geq \min \{(x.z)_w, (y.z)_w\} - \delta.$$

b) Sei jetzt $(X, d) = (\mathbb{R}^2, d_E)$, wobei d_E die euklidische Metrik ist. Seien $x, y \in \mathbb{R}^2$ und E die Ellipse mit den Brennpunkten x und y durch w. Wo finden wir $(x.y)_w$ in dieser Situation wieder?

Abgabe bis Montag, 27. Oktober 2014, vor Beginn der Übung oder bis 13.50 Uhr in den roten Kasten im 1. Stock, C-Teil des Allianzgebäudes (05.20). Gruppenabgabe ist erlaubt.