Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

27. Oktober 2014

JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen

Dipl.-Math. oec. Anja Randecker

Geometrische Gruppentheorie II – Übungsblatt 2

Stichworte: Gromov-Produkt, Hyperbolizität als Invariante unter Quasi-Isometrien, hyperbolische Gruppen

Aufgabe 1 *Logarithmische Spirale* (3 Punkte)
Sei $\gamma\colon [1,\infty) \to \mathbb{C}, t \mapsto t \cdot e^{\mathrm{i}\log t}$ die logarithmische Spirale, die in Aufgabe 3 auf Übungsblatt 11 der Vorlesung Geometrische Gruppentheorie I eingeführt wurde. Dort wurde gezeigt, dass γ eine quasi-isometrische Einbettung von $([1,\infty), |\cdot|)$ nach $(\mathbb{C}, d_E)$ ist, wobei d_E die euklidische Metrik ist.

a) Zeige, dass $\gamma([1,\infty))$ mit der Metrik, die wir erhalten, wenn wir d_E auf $\gamma([1,\infty))$ einschränken, nicht hyperbolisch ist.

b) Ist das Bild eines hyperbolischen Raumes unter einer Quasi-Isometrie immer hyperbolisch?

Aufgabe 2 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ *ist eine hyperbolische Gruppe* (5 Punkte)
Sei $\pi\colon \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ die kanonische Projektion. Wir betrachten die Untergruppen $\Gamma(2)$ und $\Gamma'(2)$ von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ mit

$$\Gamma(2) := \mathrm{Kern}(\pi) \quad \text{und} \quad \Gamma'(2) := \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

a) Zeige, dass $\Gamma'(2)$ eine freie Gruppe mit zwei Erzeugern ist.
Hinweis: Nutze das Ping-Pong-Lemma aus Aufgabe 2, Übungsblatt 7, Geometrische Gruppentheorie I.

b) Zeige, dass $\Gamma(2)$ erzeugt ist von den Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Folgere, dass $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ eine hyperbolische Gruppe ist.

Abgabe bis Montag, 3. November 2014, vor Beginn der Übung oder bis 13.50 Uhr in den roten Kasten im 1. Stock, C-Teil des Allianzgebäudes (05.20). Gruppenabgabe ist erlaubt.