Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

17. November 2014

JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen

Dipl.-Math. oec. Anja Randecker

Geometrische Gruppentheorie II – Übungsblatt 5

Stichworte: hyperbolische Räume, Rand eines hyperbolischen Raumes, Raum der Enden

Aufgabe 1 *Lemma 6.3 iii) zu Strahlen zum selben Randpunkt* (4 Punkte)
Seien (X,d) ein eigentlicher, geodätischer, hyperbolischer Raum und $c_1, c_2\colon [0,\infty) \to X$ geodätische Strahlen mit $c_1(\infty) = c_2(\infty)$. Zeige die folgenden Aussagen:

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $g_n\colon \Big[0, d\Big(c_1(0), c_2(n)\Big)\Big] \to X$ ein geodätisches Segment von $c_1(0)$ nach $c_2(n)$. Dann gibt es $\delta \geq 0$ und $T_1 \geq 0$, so dass für $n \in \mathbb{N}_0$ und $t \in \Big[T_1, d\Big(c_1(0), c_2(n)\Big)\Big]$ gilt:
$$d\Big(g_n(t), \mathrm{Bild}(c_2)\Big) \leq \delta$$

b) Es gibt $\delta \geq 0$ und $T_1, T_2 \geq 0$, so dass für alle $t \geq 0$ gilt:
$$d\Big(c_1(T_1 + t), c_2(T_2 + t)\Big) \leq 5\delta$$

Aufgabe 2 *Zusammenhang zwischen Rand und Raum der Enden* (4 Punkte)

a) Sei (X,d) ein eigentlicher, geodätischer, hyperbolischer Raum. Zeige, dass es eine surjektive, stetige Abbildung $\partial X \to \mathrm{Ends}(X)$ gibt.

b) Bestimme den Rand von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.
Hinweis: Wie in der Vorlesung schon angedeutet wurde (und noch bewiesen wird), haben quasi-isometrische Räume homöomorphe Ränder. Damit ist der Rand einer hyperbolischen Gruppe wohldefiniert.

Abgabe bis Montag, 24. November 2014, vor Beginn der Übung oder bis 13.50 Uhr in den roten Kasten im 1. Stock, C-Teil des Allianzgebäudes (05.20). Gruppenabgabe ist erlaubt.