Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

24. November 2014

JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen

Dipl.-Math. oec. Anja Randecker

Geometrische Gruppentheorie II – Übungsblatt 6

Stichworte: Rand eines hyperbolischen Raumes, hyperbolische Gruppen, Dehn-Funktion

Aufgabe 1 *Rand von $\mathbb{R}^2$ mit der KVV-Metrik* (3 Punkte)
Betrachte $(\mathbb{R}^2, d_{KVV})$ wie in Aufgabe 4 auf Übungsblatt 11 der Vorlesung Geometrische Gruppentheorie 1. Sei $p = (0,0)$ und $c\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t,0)$.

a) Bestimme den Rand von $(\mathbb{R}^2, d_{KVV})$ als Menge.
b) Wie sehen die Umgebungen $V_n^k(c(\infty))$ für $k > 0$, $n \geq 0$ aus?
c) Wie sieht der Rand von $(\mathbb{R}^2, d_{KVV})$ als topologischer Raum aus?

Aufgabe 2 *Dehn-Funktion* (5 Punkte)
Sei $G = \langle X | R \rangle$ eine Gruppe mit einer endlichen Präsentation und $\pi\colon F(X) \to G$ die Projektion von der freien Gruppe über X nach G.

Für ein $w \in F(X)$ mit $\pi(w) = 1$ definieren wir den *Flächeninhalt* $A(w)$ von w durch

$$A(w) := \min\{k \in \mathbb{N} : w = \prod_{i=1}^{k} w_i r_i w_i^{-1} \text{ mit } w_i \in F(X), r_i \in R \cup R^{-1}\}.$$

Weiter heiße

$$\delta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto \max\{A(w) : w \in F(X), \pi(w) = 1, |w| \leq n\}$$

die *Dehn-Funktion* von $\langle X | R \rangle$.

Gibt es ein $C > 0$, so dass $\delta(n) \leq C \cdot n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann sagen wir, dass $\langle X | R \rangle$ eine *lineare isoperimetrische Ungleichung erfüllt*.

Zeige die folgenden Aussagen:

a) Die Eigenschaft, eine lineare isoperimetrische Ungleichung zu erfüllen, ist unabhängig von der gewählten Präsentation einer Gruppe.
b) Jede hyperbolische Gruppe erfüllt eine lineare isoperimetrische Ungleichung. *Hinweis: Ein anderes Konzept, das nach Dehn benannt wurde, könnte hier hilfreich sein.*
c) Welche Art von isoperimetrischer Ungleichung erfüllt $\mathbb{Z}^k$ für $k \geq 1$?

Abgabe bis Montag, 01. Dezember 2014, vor Beginn der Übung. Gruppenabgabe ist erlaubt.