Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen
Dr. Florian Nisbach

1. 12. 2014

Geometrische Gruppentheorie II – Übungsblatt 7

Stichworte: (Erweiterte) Möbiustransformationen, Kreisspiegelungen

Aufgabe 1 (4 Punkte)

In der Vorlesung haben wir die *erweiterten Möbiustransformationen* kennengelernt:

$$\text{Möb}^*_{\mathbb{C}} := \text{Möb}_{\mathbb{C}} \cup \left\{ \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \,\middle|\, a, \dots, d \in \mathbb{C},\, ad - bc = 1 \right\}$$

Zeige:

a) $\text{Möb}^*_{\mathbb{C}}$ ist eine Gruppe und als solche von $z \mapsto z+1$, $z \mapsto z^{-1}$, $z \mapsto a \cdot z \, (a \in \mathbb{C}^\times)$ sowie $z \mapsto \bar{z}$ erzeugt.

b) $[\text{Möb}^*_{\mathbb{C}} : \text{Möb}_{\mathbb{C}}] = 2$.

c) Jede Spiegelung an einem verallgemeinerten Kreis in $\widehat{\mathbb{C}}$ ist eine erweiterte Möbiustransformation.

d) Jede Möbiustransformation lässt sich als Produkt einer geraden Anzahl von Spiegelungen an verallgemeinerten Kreisen schreiben.

e) Die aus der Vorlesung bekannte Abbildung $\delta\colon \text{Möb}(\mathbb{U}^3) \to \text{Möb}_{\mathbb{C}}$ ist ein Isomorphismus.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Welche qualitativ verschiedenen Typen von Möbiustransformationen gibt es? Schauen wir mal. Es sei $A \in \text{Möb}_{\mathbb{C}} \setminus \{\text{id}\}$.

a) Komme der Anzahl der Fixpunkte von A auf die Spur.

b) Zeige: Hat A genau einen Fixpunkt, so ist A zu $z \mapsto z+1$ konjugiert.[1] A heißt dann *parabolisch.*

c) Zeige: Hat A zwei Fixpunkte, dann gibt es ein eindeutiges $c \in \mathbb{C}^\times$, sodass A zu $z \mapsto c \cdot z$ konjugiert ist.

$$A \text{ heißt } \begin{cases} \textit{elliptisch} & \Leftrightarrow |c| = 1 \\ \textit{hyperbolisch} & \Leftrightarrow c \in \mathbb{R}^\times,\, |c| \neq 1 \\ \textit{loxodromisch} & \text{sonst} \end{cases}.$$

d) Wie verteilt sich die in a) gefundene Bedingung auf diese Fälle?

e) Zeige: Ist $k \in \mathbb{Z}$ und $A^k \neq \text{id}$, dann haben A und A^k die gleichen Fixpunkte.

[1] NB: Das stimmt in $\text{Möb}(\mathbb{U}^2)$ nicht!

Diskussionsgrundlage ohne Abgabe[2]

Aus Aufgabe 2 lernen wir, dass Möbiustrafos von endlicher Ordnung notwendigerweise elliptisch sind. Inzwischen haben wir gelernt, dass diese auf $\mathbb{U}^3$ die gesamte Achse zwischen den beiden Fixpunkten auf dem Rand stabilisieren. Isometrien endlicher Ordnung haben hier also Fixpunkte. Wie könnte sich das vernünftig verallgemeinern?

Vorschlag: Sei X eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und ein eindeutig geodätischer Raum und $\phi\colon X \to X$ eine Isometrie endlicher Ordnung. Dann hat ϕ einen Fixpunkt auf X.

Beweisideen und Verallgemeinerungsvorschläge dürfen in die Übung mitgebracht werden.

Abgabe: Bis Montag, 8. 12. 2014, 14:01 beim Übungsleiter Deines Vertrauens. Gruppenabgabe ist erlaubt.

[2]Ihr dürft trotzdem schon mal drüber nachdenken…