Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen
Dr. Florian Nisbach

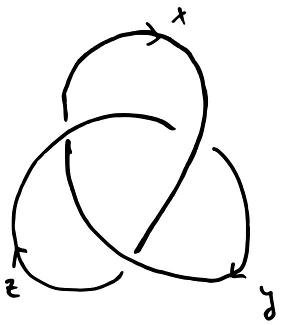
8. 12. 2014

Geometrische Gruppentheorie II – Übungsblatt 8

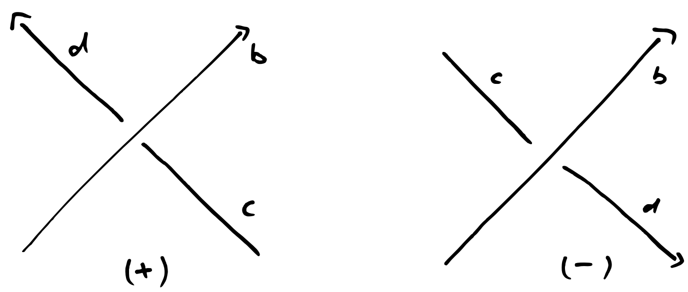
Stichworte: Knoten, Knotendiagramm, Knotengruppe, hyperbolischer Knoten

Ein Crashkurs in Knotentheorie. Ein Knoten ist eine glatte Einbettung $K\colon S^1 \hookrightarrow S^3$ (bzw. schlampigerweise auch deren Bild). $\pi_1(K) := \pi_1(S^3 \setminus K(S^1))$ heißt Fundamentalgruppe von K. Wir können sie wie folgt berechnen:

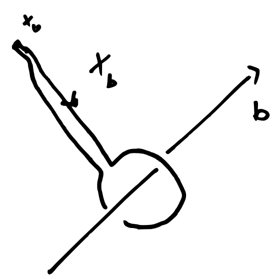
1. Gib dem Knoten eine Orientierung und male ihn. Dabei bekommt man ein *Knotendiagramm*, ein Gebilde, das in der Ebene lebt und in endlich viele *Bögen* zerfällt:



Diese Kreuzungen können *positiv* oder *negativ* sein:



2. Spendiere für jeden Bogen b einen Erzeuger X_b. Sei $S := \{X_b \mid b \text{ Bogen}\}$. Die Erzeuger wollen wir uns wie folgt vorstellen:



Dabei stellen wir uns am besten den Basispunkt x_0 „oberhalb“ des Knotens vor.

3. Für jede positive Kreuzung wie in (1.) führen wir die Relation $X_b^{-1}X_cX_b = X_d$ ein, für jede negative die Relation $X_bX_cX_b^{-1} = X_d$. Sei R die Menge dieser Relationen. Dann gilt:

Satz (W. Wirtinger, 1905) $\quad \pi_1(K) \cong \langle S \mid R \rangle$.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Zeige, dass in $\pi_1(K)$ die oben definierten Relationen tatsächlich gelten.

b) Ein Knoten K besitze ein Diagramm, das aus r Bögen besteht. Zeige, dass sich $\pi_1(K)$ von $r-1$ Elementen erzeugen lässt.

c) Berechne die Fundamentalgruppe $\pi_1(K_3)$. Dabei ist K_3 der sogenannte *Kleeblattknoten*, dessen Diagramm auf der Vorderseite zu sehen ist.

d) Zeige, dass sich $\pi_1(K_3)$ wie folgt präsentieren lässt:

$$\pi_1(K_3) \cong \langle x, y \mid xyx = yxy \rangle.$$

Hyperbolische Knoten. Nun definieren wir: Ein Knoten K heißt *hyperbolisch*, wenn es eine Kleinsche Gruppe Γ gibt, die frei auf $\mathbb{U}^3$ operiert, sodass $\mathbb{U}^3/\Gamma$ zu $S^3 \setminus K$ homöomorph ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeige:

a) Wenn ein Knoten hyperbolisch ist, dann ist $\pi_1(K)$ zu einer Kleinschen Gruppe isomorph, die frei auf $\mathbb{U}^3$ operiert. Die Umkehrung stimmt sogar auch!

b) Es gibt $a, b \in \pi_1(K_3)$ (die aus Aufgabe 1 c...) mit $a^2 = b^3$, sodass $\pi_1(K_3)$ von a und b erzeugt ist.

c) $\pi_1(K_3)$ ist nicht zyklisch.

d) Der Kleeblattknoten ist nicht hyperbolisch.

Abgabe: Bis Montag, 15. 12. 2014, 14:01 beim Übungsleiter Deines Vertrauens. Gruppenabgabe ist erlaubt.