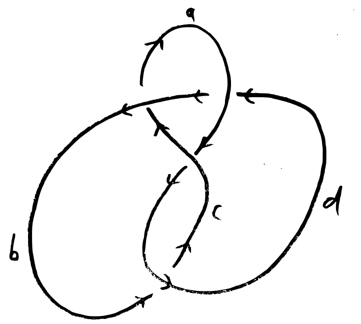
Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen
Dr. Florian Nisbach

15. 12. 2014

Geometrische Gruppentheorie II – Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (8 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir (zumindest teilweise) verstehen, dass der sogenannte „Achterknoten“ K_4 hyperbolisch ist. Dieser ist durch folgendes Diagramm gegeben:



a) Bestimme mit der Methode, die wir auf dem 8. Übungsblatt kennengelernt haben, eine Präsentation der Knotengruppe $\pi_1(K_4)$.

b) Eliminiere die Erzeuger X_c und X_d und zeige so, dass sich $\pi_1(K_4)$ wie folgt präsentieren lässt:
$$\pi_1(K_4) = \langle X_a, X_b \mid X_a[X_a, X_b^{-1}]^{-1} X_b^{-1} [X_a, X_b^{-1}] \rangle.$$

c) Es sei $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$. Zeige, dass $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\omega])$ eine Kleinsche Gruppe ist.

d) Es seien $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega & 1 \end{pmatrix}$ und $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ und A, B ihre Bilder in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. Zeige, dass $\Gamma := \langle A, B \rangle \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ eine Kleinsche Gruppe ist, und dass es einen surjektiven Homomorphismus $\varphi\colon \pi_1(K_4) \to \Gamma$ gibt.

e) Man kann zum Beispiel durch Konstruktion eines geeigneten Fundamentalbereichs für Γ zeigen, dass φ auch injektiv ist. Was fehlt dann noch, um einzusehen, dass K_4 ein hyperbolischer Knoten ist?

Abgabe: Bis Montag, 12. 1. 2015, 14:01 beim Übungsleiter Deines Vertrauens. Gruppenabgabe ist erlaubt.