Karlsruher Institut für Technologie
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
12. Januar 2015

JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen Dipl.-Math. oec. Anja Randecker

Geometrische Gruppentheorie II – Übungsblatt 10

Stichworte: Abbildungsklassen, universelle Überlagerung, hyperbolische Flächen

Aufgabe 1 *Abbildungsklassen des Torus* (5 Punkte)
Betrachte den Torus $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ mit der kanonischen Projektion $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Eine Abbildung $\varphi\colon T \to T$ heißt *affine Abbildung*, wenn es eine Matrix $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^2$ gibt, so dass $\varphi(\pi(z)) = \pi(A \cdot z + b)$ für alle $z \in \mathbb{R}^2$ gilt.

Zeige die folgenden Aussagen:

a) Die Abbildungsklassengruppe $\mathrm{Mod}(\mathbb{R}^2)$ von $\mathbb{R}^2$ ist trivial.
b) Jeder orientierungserhaltende Homöomorphismus von T ist homotop zu einer affinen Abbildung.
c) Gibt es zwei verschiedene Matrizen $A_1, A_2 \in SL(2,\mathbb{R})$, so dass die zugehörigen affinen Abbildungen auf T mit $b_1 = b_2 = 0$ zueinander homotop sind?

Hinweis: Erinnere dich an die Liftungseigenschaften der universellen Überlagerung.

Aufgabe 2 *Hyperbolische Flächen* (3 Punkte)
Zeige, dass es keine geschlossenen hyperbolischen Flächen von Geschlecht 0 oder 1 gibt.

Hinweis: Hier lohnt es sich, Aufgabe 2 des Übungsblatts 10 der Geometrischen Gruppentheorie I nachzuschlagen.

Zusatzaufgabe *Seifert-Weber-Raum?* (2 Zusatzpunkte)
Stelle einen Dodekaeder her und färbe ihn so, dass man daraus die Identifikationen erkennen kann, die ihn zu einer dreidimensionalen orientierbaren Mannigfaltigkeit machen.

Abgabe bis Montag, 19. Januar 2015, vor Beginn der Übung. Gruppenabgabe ist erlaubt.

Dodekaeder