Stichwortliste zur Vorlesung

Geometrische Gruppentheorie II

Gabriela Weitze-Schmithüsen

Karlsruhe, Wintersemester 2014/2015

Kapitel I Hyperbolische Gruppen und Räume

I.1 Metrische Vorbereitungen

Ziel: Wie verhalten sich Wege zu geodätischen Segmenten?

Einige nützliche Eigenschaften von metrischen Räumen; Länge von Wegen; der Hausdorff-Abstand auf der Menge der kompakten Teilmengen eines metrischen Raums; liegt ein Weg in der ε-Umgebung eines geodätischen Segments, dann liegt das geodätische Segment in der 2ε-Umgebung des Weges; das Ballvermeidungslemma für hyperbolische Räume.

I.2 Quasi-Geodätische

Ziel: Wie verhalten sich Quasi-Geodätische zu Geodätischen?
Definition von Quasi-Geodätischen und erste Eigenschaften; *Satz 1:* Quasi-Geodätische haben kleinen Hausdorff-Abstand von Geodätischen.

I.3 Hyperbolische Gruppen

Ziel: Hängt Hyperbolizität von Gruppen von den gewählten Erzeugern ab?

Satz 2: Hyperbolizität ist eine quasi-isometrische Invariante.

I.4 Der hyperbolische Raum

Ziel: Wie bekommt man höherdimensionale hyperbolische Mannigfaltigkeiten?

Einführung des Hyperboloid-Modells $(\mathbb{H}^n, d_H)$; erste Eigenschaften der Metrik; insbesondere: $\mathbb{H}^n$ ist eindeutig geodätischer Raum und die Geodätischen können explizit angegeben werden. $\mathbb{H}^n$ ist hyperbolisch.

I.5 Die Isometriegruppe vom hyperbolischen Raum

Ziel: Wie sieht die Isometriegruppe vom hyperbolischen n-Raum aus?

Hyperebenen von $\mathbb{H}^n$ und Spiegelungen; Fortsetzbarkeit von Isometrien von endlichen Teilmengen auf den ganzen Raum $\mathbb{H}^n$; die Spiegelungen als Erzeuger der Isometriegruppe; Isometrien sind linear; *Satz 3:* Die Isometriegruppe ist isomorph zu $O(n,1)_+$.

I.6 Rand von hyperbolischen Räumen

Ziel: Wie kann man hyperbolische Räume kompaktifizieren?

Definition des Randes eines hyperbolischen Raums über Äquivalenzklassen von geodätischen bzw. quasi-geodätischen Strahlen; Abstandseigenschaften von geodätischen Strahlen; Geodätische zwischen Randpunkten; Topologie auf dem Rand; Topologie auf $\overline{X} = X \cup \delta X$; *Satz 4:* $\overline{X}$ ist Kompaktifizierung von X und Quasi-Isometrien induzieren Homöomorphismen von $\overline{X}$; als Beispiel: Rand des hyperbolischen Raums in den unterschiedlichen Modellen.

I.7 Der hyperbolische Raum als Riemannsche Mannigfaltigkeit

Ziel: Wie kann man die hyperbolischen Modelle konzeptioneller beschreiben?

Die Metrik des Hyperboloidmodells als Riemannsche Metrik; explizite Isometrien zwischen den unterschiedlichen Modellen.

I.8 Kleinsche Gruppen

Ziel: Wie bekommt man hyperbolische Mannigfaltigkeiten mit nicht-trivialer Fundamentalgruppe?

Die Isometriegruppe $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{U}^3)$ ist isomorph zur Gruppe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ der komplexen Möbiustransformationen; Kleinsche Gruppen; Äquivalenz von Diskretheit in $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ und eigentlich diskontinuierlicher Aktion auf $\mathbb{H}^3$; Poincaré-Erweiterung; Beispiele für Kleinsche Gruppen: Fuchssche Gruppen, Schottky-Gruppen und die Poincaré-Gruppe.

I.9 Geschlossene hyperbolische Dreimannigfaltigkeiten

Ziel: Wie kann Thurston kompakte hyperbolische Dreimannigfaltigkeiten konstruieren und was hat das mit Flächenhomöomorphismen zu tun?

Konstruktion von hyperbolischen Gruppen als Fundamentalgruppen von hyperbolischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten; Ausblick – der Satz von Thurston: Konstruktion von kompakten hyperbolischen Dreimannigfaltigkeiten über Abbildungstori, die entlang von Pseudo-Anosovs verklebt werden; die drei Abbildungsklassentypen nach Thurston: periodische, reduzible, und pseudo-Anosov Abbildungsklassen; singuläre Translationsflächen und Blätterungen; die Veechgruppe; *Satz 5:* Thurston-Klassifikation für affine Homöomorphismen; *Satz 6:* Der Wiederkehrsatz nach Poincaré.

I.10 Mostow-Rigidität

Ziel: Wie viele hyperbolische Strukturen kann es auf einer kompakten n-Mannigfaltigkeit ($n \geq 3$) geben?

Abstiegsbedingungen für Homöomorphismen; *Satz 7:* Mostow-Rigidität: Hyperbolische Struktur auf einer kompakten Dreimannigfaltigkeit ist eindeutig bis auf Homotopie; Folgerung: homöomorphe Dreimannigfaltigkeiten sind isometrisch.

Kapitel II Klassifikationsprobleme

II.1 Modulraum und Teichmüllerraum

Ziel: Wie viele hyperbolische Strukturen kann es auf einer kompakten 2-Mannigfaltigkeit geben?

Definition des Teichmüllerraums $T(X_0)$, des Modulraums $M(X_0)$ und der Abbildungsklassengruppe $\mathrm{Mod}^+(X_0)$; $M(X_0) = T(X_0)/\mathrm{Mod}^+(X_0)$; Einbettung von $T(X_0)$ in einen Quotienten der Darstellungsvarietät $\mathrm{Hom}(\pi_1(X_0), \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))$; Definition einer Topologie auf $T(X_0)$; Skizze der Konstruktion der Fricke-Koordinaten für den Teichmüllerraum.

II.2 Riemannsche Flächen

Ziel: Wie kann man Punkte in $M(X_0)$ explizit beschreiben?

Einführung von Riemannschen Flächen; Geschlossene Riemannsche Flächen von Geschlecht $g \geq 2$ sind Quotienten der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ nach einer Fuchsschen Gruppe. Dies definiert eine bijektive Abbildung zwischen Isometrieklassen hyperbolischer geschlossener Flächen von Geschlecht g und Biholomorphieklassen geschlossener Riemannscher Flächen von Geschlecht g. Endliche singuläre Translationsflächen sind Riemannsche Flächen.

II.3 Teichmüllerraum als metrischer Raum

Ziel: Wie misst man Abstände im Teichmüllerraum?

Dilatation als Maß dafür, wie weit eine Abbildung davon entfernt ist, holomorph zu sein; Einführung der Teichmüller-Metrik; Eigenschaften der Teichmüller-Metrik (viele ohne Beweis); singuläre Halbtranslationsflächen; Teichmüllerabbildungen; die Satzgruppe von Teichmüller.

II.4 Thurstons Klassifikation der Abbildungsklassen

Ziel: Wie kann man Flächenhomöomorphismen verstehen?

Elliptische, parabolische und hyperbolische Isometrien für allgemeine metrische Räume; einige nützliche Sätze (ohne Beweis) aus der hyperbolischen Geometrie und der Topologie von geschlossenen Flächen; der Klassifikationssatz von Thurston.