Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen
Dr. Björn Mützel

Geometrische Gruppentheorie (SS 2014)
Übungsblatt 1

Stichwörter: Graph, Graphenhomomorphismus, Cayleygraph

Abgabe: Bis Mittwoch 23.04., 15:45 Uhr im Briefkasten der Vorlesung oder in der Übungsstunde.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

a) Sei $P_5 \subset \mathbb{R}^2$ ein regelmäßiges Fünfeck. Die Diedergruppe D_5 ist die Gruppe der isometrischen Abbildungen des $\mathbb{R}^2$, die P_5 auf sich abbilden. Diese Gruppe besteht aus 5 Drehungen und 5 Spiegelungen. Zeichnen Sie einen zusammenhängenden Cayleygraph für D_5 mit 2 Erzeugern.

b) Zeichnen Sie den Cayleygraph für $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit den Erzeugern $(\bar{1}, 0)$ und $(\bar{0}, 1)$.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Seien G eine Gruppe und S ein Erzeugendensystem von G, so dass $S \cap S^{-1} = \emptyset$. Sei weiterhin $\Gamma = \Gamma(G,S)$ der zugehörige Cayleygraph. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? (Bitte wie stets mit Beweis oder Gegenbeispiel.)

a) Γ ist regulär.

b) Γ ist stark regulär.

c) Der Petersen-Graph aus Abb. 1 ist der Cayleygraph einer endlich erzeugten Gruppe.

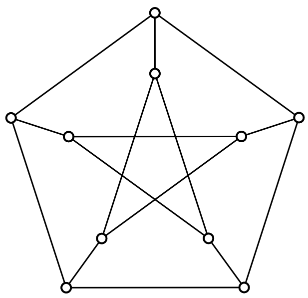

Abbildung 1: Der Petersen-Graph

Bemerkung:

1.) Ein kombinatorischer Graph ist genau dann regulär, wenn jede Ecke gleich viele Nachbarn besitzt.
Ein Graph heißt *stark regulär*, falls er regulär ist und es natürliche Zahlen k und n gibt, so dass für jedes Paar $(v_1, v_2), v_1 \neq v_2$ von Ecken gilt: Sind v_1 und v_2 Nachbarn, so existieren genau n Ecken, die sowohl Nachbar von v_1 als auch Nachbar von v_2 sind. Sind v_1 und v_2 keine Nachbarn, so existieren genau k Ecken, die sowohl Nachbar von v_1 als auch Nachbar von v_2 sind.

2.) Sei P der Graph, den man erhält, wenn man jede Kante des Petersen-Graphs durch eine Doppelkante ersetzt. Ist P der Cayleygraph einer endlich erzeugten Gruppe? Falls Sie dieses Problem lösen, erhalten Sie 5 Extrapunkte. Hier darf verwendet werden, dass D_5 und $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ die einzigen Gruppen mit 10 Elementen sind.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Zeige: Zu jeder abzählbaren Gruppe G gibt es einen zusammenhängenden Graphen Γ mit $\mathrm{Aut}(\Gamma) \cong G$.

Hinweis:

Ein Cayleygraph ist schon mal ein guter Anfang. Dann muss man zusätzliche Automorphismen zerstören.