Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen
Dr. Björn Mützel

Geometrische Gruppentheorie (SS 2014)

Übungsblatt 2

Stichwörter: Gruppenaktion, Stabilisator, Bahn, semidirektes Produkt, Aktion durch Linksmultiplikation auf Cayleygraphen

Abgabe: Bis Mittwoch 30.04., 15:45 Uhr im Briefkasten der Vorlesung oder in der Übungsstunde.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ die Einheitssphäre und $x_0 = (1,0,0) \in \mathbb{S}^2$. Die orthogonale Gruppe $O(3)$ ist die Gruppe der isometrischen Abbildungen des $\mathbb{R}^3$, die $\mathbb{S}^2$ auf sich abbilden. Man kann eine Aktion $\bullet : O(3) \times \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ definieren durch

$$Q \bullet x := Q(x) \quad \text{für alle} \quad Q \in O(3),\ x \in \mathbb{S}^2.$$

a) Gib den Stabilisator $\mathrm{Stab}(x_0)$ an. (ohne Beweis)
b) $\mathrm{Stab}(x_0)$ operiert als Untergruppe von $O(3)$ auf $\mathbb{S}^2$. Bestimme den Bahnenraum von $\mathrm{Stab}(x_0)$.
c) Zeige, dass $O(3)$ transitiv auf $\mathbb{S}^2$ operiert.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Seien H und N Gruppen. Weiter sei $\theta : H \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Gruppenhomomorphismus. Auf der Menge $G := N \times H$ kann man eine Verknüpfung $* : G \times G \to G$ definieren durch

$$(n_1,h_1) * (n_2,h_2) := (n_1\theta(h_1)(n_2), h_1h_2) \quad \text{für alle} \quad n_1,n_2 \in N,\ h_1,h_2 \in H,$$

wobei jeweils die Verknüpfungen in N und H verwendet werden.

a) Zeige, dass $(G,*)$ eine Gruppe ist, die $N \times \{1_H\}$ als Normalteiler und $\{1_N\} \times H$ als Untergruppe enthält.
Die Gruppe $(G,*)$ wird mit $N \rtimes_\theta H$ bezeichnet und heißt *semidirektes Produkt* von N und H.
b) Stelle die Diedergruppe D_5 auf nicht-triviale Art als semidirektes Produkt dar.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

a) Sei G eine endliche Gruppe und N eine normale Untergruppe von G, so dass $\#N$ und $\#G/N$ teilerfremd sind. Sei weiterhin H eine Untergruppe von G mit $\#H = \#G/N$. Zeige, dass $G = N \rtimes_\theta H$, wobei θ der durch die Konjugation mit Elementen aus H induzierte Homomorphismus $\theta : H \to \mathrm{Aut}(N)$ ist.
b) Seien H und N normale Untergruppen einer endlichen Gruppe G, so dass $\#H$ und $\#N$ teilerfremd sind. Zeige, dass

$$n \cdot h = h \cdot n \quad \text{für alle} \quad h \in H, n \in N \quad \text{und} \quad H \times N \cong H \cdot N.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Sei G eine Gruppe und S ein Erzeugendensystem von G, das keine Elemente von Ordnung ≤ 2 enthält, $\Gamma = \Gamma(G,S) = (V,E)$ der zugehörige Cayleygraph. Sei weiterhin $\rho : G \to \mathrm{Aut}(\Gamma)$ die Aktion von G auf Γ durch Linksmultiplikation und schreibe $f_g := \rho(g)$.

a) Für eine Ecke v des Cayleygraphen sei $\mathrm{Stab}(v) := \{h \in \mathrm{Aut}(\Gamma) \mid h(v) = v\}$ die Stabilisatorgruppe von v.
Zeige, dass sich jedes Element h in $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ eindeutig schreiben lässt als $h = f_g \cdot h_1$ mit $h_1 \in \mathrm{Stab}(1)$ und $g \in G$.
b) Es seien E^+ die natürliche Orientierung von Γ definiert durch $E^+ := \{(g,s) \in E \mid g \in G, s \in S\}$ und $w : E^+ \to S$ die natürliche Kantenbeschriftung von $\Gamma(G,S)$ mit Elementen aus S. Weiterhin sei:

$$\mathrm{Aut}(\Gamma,w) := \{h \in \mathrm{Aut}(\Gamma) \mid \ h(E^+) = E^+ \ \text{und für alle} \ e_1,e_2 \in E \ \text{gilt} \ w(e_1) = w(e_2) \Rightarrow w(h(e_1)) = w(h(e_2))\}.$$

Zeige, dass $\rho(G)$ Normalteiler in $\mathrm{Aut}(\Gamma,w)$ ist und folgere, dass $\mathrm{Aut}(\Gamma,w)$ ein semidirektes Produkt aus G und $\mathrm{Stab}(1) \cap \mathrm{Aut}(\Gamma,w)$ ist.

Hinweis:
Für **Aufgabe 2-4** erinnert Euch an die Definition des inneren semidirekten Produkts aus der Übung oder schlagt sie nach.